

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STROJNÍ

KATEDRA APLIKOVANÉ MECHANIKY

# **Problematika identifikace kořenů disperzní rovnice Lambových vln**

The Problematics of Lamb Wave Dispersion  
Equation Root-Finding Algorithms

Autor:

Bc. Michal Molčan

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Michal Šofer, Ph.D.

Ostrava 2019

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Michal Molčan**

Studijní program: N2301 Strojní inženýrství

Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika

Téma: **Problematika identifikace kořenů disperzní rovnice Lambových vln**  
**The Problematics of Lamb Wave Dispersion Equation Root-Finding Algorithms**

Jazyk vypracování: čeština

### Zásady pro vypracování:

1. Vypracujte teoretický úvod do problematiky Lambových vln.
2. V návaznosti na bod 1 prezentujte odvození disperzní rovnice Lambových vln včetně jejího významu pro aplikaci v NDT praxi.
3. Vypracujte řešerši týkající se metod numerického řešení disperzní rovnice Lambových vln.
4. Aplikujte vybrané numerické metody identifikace kořenů disperzní rovnice a srovnajte jejich funkčnost.

### Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] J. L. Rose, Ultrasonic Guided Waves in Solid Media. Cambridge University Press, 2014, ISBN 0 521 64043 1
- [2] V. Pagneux, Determination of Lamb mode eigenvalues, The Journal of the Acoustical Society of America, 110, pp. 1307-1314, 2001
- [3] B.A. Auld, Acoustic fields and waves in solids, Vol. 2, Krieger Pub Co, 1990, ISBN 978-0898747836

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Michal Šofer, Ph.D.**

Datum zadání: 21.12.2018

Datum odevzdání: 20.05.2019



Ing. Martin Fusek, Ph.D.  
vedoucí katedry




prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.  
děkan fakulty

### **Místopřísežné prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne 19.5.2019

  
.....  
podpis studenta

## Prohlašuji, že

- jsem si vědom, že na tuto moji závěrečnou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. Zákon o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (dále jen Autorský zákon), zejména § 35 (Užití díla v rámci občanských či náboženských obřadů nebo v rámci úředních akcí pořádaných orgány veřejné správy, v rámci školních představení a užití díla školního) a § 60 (Školní dílo),
- беру на ве́домі́, že Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“ má právo užít tuto závěrečnou bakalářskou práci nekomerčně ke své vnitřní potřebě (§ 35 odst. 3. Autorského zákona),
- bude-li požadováno, jeden výtisk této bakalářské práce bude uložen u vedoucího práce,
- s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 Autorského zákona,
- užít toto své dílo, nebo poskytnout licenci k jejímu využití, mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše),
- беру на ве́домі́, že – podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů – že tato bakalářská práce bude před obhajobou zveřejněna na pracovišti vedoucího práce, a v elektronické podobě uložena a po obhajobě zveřejněna v Ústřední knihovně VŠB-TUO, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě dne 19.5.2019

  
.....  
podpis autora práce

Jméno a příjmení autora práce:

Bc. Michal Molčan

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Záhlinice 136, 768 24 Hulín

## Anotace diplomové práce

MOLČAN, M. Problematika identifikace kořenů disperzní rovnice Lambových vln: diplomová práce. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2019, 53 s. Vedoucí práce: Šofer, M.

Diplomová práce se zabývá problematikou identifikace kořenů disperzní rovnice Lambových vln, které mohou ležet jak v reálném, ryze imaginárním, tak komplexním oboru hodnot. V teoretické části se autor věnuje problematice šíření vln, fyzikálnímu významu vlnových čísel a Lambovým vlnám včetně jejich praktického využití. Praktická část práce obsahuje popis dvou numerických metod – metody kontur a metody spektrálního rozkladu, které autor aplikuje při identifikaci komplexních kořenů disperzní rovnice Lambových vln a následně srovnává jejich numerickou účinnost.

**Klíčová slova:** Lambovy vlny, vlnová čísla, disperzní rovnice, numerické metody

## Annotation of master thesis

MOLČAN, M. The Problematics of Lamb Wave Dispersion Equation Root-Finding Algorithms: Master thesis. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2019, 53 p. Thesis head: Šofer, M.

The thesis deals with problematics of Lamb wave dispersion equation root finding, which can result in real, imaginary or even complex numbers. In the theoretical part, author describes wave propagation phenomena, physical meaning of wavenumbers, theory of Lamb waves and its practical applications. The practical part contains description of two methods – the method of contours and the method of spectral decomposition, which have been used for obtaining complex roots of Lamb wave dispersion equation and subsequently compared with respect to the numerical efficiency.

**Keywords:** Lamb waves, wavenumbers, dispersion curves, numerical methods

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>12</b>
<b>1 Problematika šíření vln v kontinuu</b>	<b>13</b>
1.1 Řídící vlnová rovnice pro napnutou strunu . . . . .	13
1.2 Komplexní vlnová čísla . . . . .	14
<b>2 Lambovy vlny</b>	<b>17</b>
2.1 Módy Lambových vln . . . . .	17
2.2 Odvození disperzní rovnice Lambových vln metodou potenciálů . . . .	22
2.2.1 Symetrické módy . . . . .	26
2.2.2 Asymetrické módy . . . . .	26
2.2.3 Řešení disperzní rovnice . . . . .	27
2.3 Praktické využití Lambových vln . . . . .	28
<b>3 Numerické řešení disperzní rovnice</b>	<b>30</b>
3.1 Metoda kontur . . . . .	30
3.2 Zvýšení přesnosti vlastních čísel pomocí iteračních metod . . . . .	31
3.2.1 Zhodnocení metody a jejích výsledků . . . . .	32
3.2.2 Poznámky k implementaci . . . . .	33
3.3 Metoda spektrálního rozkladu . . . . .	34
3.3.1 Okrajové podmínky . . . . .	35
3.3.2 Řídící rovnice Lambových vln . . . . .	35
3.3.3 Spektrální rozklad . . . . .	36
3.3.4 Symetrické módy . . . . .	37
3.3.5 Antisymetrické módy . . . . .	39
3.3.6 Linearizace kvadratického problému vlastních čísel . . . . .	40
3.3.7 Redukce rozměru problému vlastních čísel . . . . .	41
3.3.8 Zhodnocení metody a jejích výsledků . . . . .	43
3.3.9 Poznámky k implementaci . . . . .	46
3.4 Porovnání numerické účinnosti . . . . .	46
<b>Závěr</b>	<b>48</b>

Seznam použité literatury	51
Seznam příloh	53

# Seznam použitých značek a symbolů

## Seznam symbolů

$A^a, D^a, C^a, D^a$	Matice kvadratického problému vlastních čísel pro asymetrické módy Lambových vln	$[\text{m}^{-1}]$
$A^s, D^s, C^s, D^s$	Matice kvadratického problému vlastních čísel pro symetrické módy Lambových vln	$[\text{m}^{-1}]$
$c_0$	Rychlost šíření vlny	$[\text{m s}^{-1}]$
$c_L$	Rychlost šíření podélné vlny	$[\text{m s}^{-1}]$
$c_T$	Rychlost šíření příčné vlny	$[\text{m s}^{-1}]$
$f$	Frekvence	$[\text{Hz}]$
$F$	Síla	$[\text{N}]$
$F_1, F_2$	Podmatice doprovodná matice problému vlastních čísel	$[\text{m}^{-1}]$
$G_1, G_2$	Podmatice doprovodná matice problému vlastních čísel	$[\text{m}^{-1}]$
$J_1, J_2, L_1, L_1$	Koeficient	$[\text{m}]$
$J_3, J_4$	Koeficient	$[-]$
$k$	Vlnové číslo	$[\text{m}^{-1}]$
$k_l$	Vlnové číslo podélné vlny	$[\text{m}^{-1}]$
$k_t$	Vlnové číslo příčné vlny	$[\text{m}^{-1}]$
$k_C$	Komplexní vlnové číslo	$[\text{m}^{-1}]$
$k_{Im}$	Imaginární složka vlnového čísla	$[\text{m}^{-1}]$
$k_{Re}$	Reálná složka vlnového čísla	$[\text{m}^{-1}]$
$K$	Druhá mocnina vlnového čísla	$[\text{m}^{-2}]$



$J_3, J_4$	Koeficient	[-]
$M, M_1, M_2$	Doprovodná matice problému vlastních čísel	[m <sup>-1</sup> ]
$R, R^a, R^s$	Funkce v reziduálním tvaru	[-]
$t$	Čas	[s]
$t_G$	Tloušťka geometrie	[m]
$T$	Funkce závislá na čase x	[-]
$u, v, w$	Složky vektoru posunutí ve směrech $x_1, x_2, x_3$	[m]
$\bar{u}, \bar{v}$	Složky vektoru posunutí ve směrech $x_1, x_2, x_3$ v modálním tvaru	[m]
$u^a, v^a, u^s, v^s$	Báze, se kterými jsou aproximována posunutí ve směrech $x_1, x_2$	[m <sup>-1</sup> ]
$u_d$	Výchylka	[m]
$U_n^a, V_n^a$	Koeficienty báze pro asymetrické módy Lambových vln	[-]
$U_n^s, V_n^s$	Koeficienty báze pro symetrické módy Lambových vln	[-]
$\mathbf{U}^a, \mathbf{V}^a$	Vektory koeficientů báze pro asymetrické módy Lambových vln	[-]
$\mathbf{U}^s, \mathbf{V}^s$	Vektory koeficientů báze pro symetrické módy Lambových vln	[-]
$\mathbf{w}$	Vektor posuvů ve směrech $x_1, x_2, x_3$	[m]
$x, x_1, x_2, x_3$	Souřadnice polohy	[m]
$X$	Funkce závislá na poloze x	[m]
$\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$	Vektor problému vlastních čísel	[-]
$\alpha$	Úhel	[rad]

$\alpha_n$	Parametr	$[\text{m}^{-1}]$
$\beta_n$	Parametr	$[\text{m}^{-1}]$
$\gamma$	Podíl druhých mocnín rychlostí $c_L, c_T$	$[\text{m s}^{-1}]$
$\delta_{ij}$	Kroneckerova delta	$[-]$
$\varepsilon_{ij}$	Složky Cauchyho tenzoru přetvoření	$[\text{Pa}]$
$\epsilon_n$	Parametr	$[-]$
$\lambda$	Lamého konstanta	$[\text{Pa}]$
$\mu$	Lamého konstanta	$[\text{Pa}]$
$\nu$	Poissonovo číslo	$[-]$
$\rho$	Hustota	$[\text{kg m}^{-3}]$
$\rho_l$	Délková hustota	$[\text{kg m}^{-1}]$
$\sigma_{ij}$	Složky tenzoru napjatosti	$[\text{Pa}]$
$\varphi$	Skalární potenciál	$[\text{m}]$
$\Phi_w$	funkce $x_2$ udávající amplitudu vektorového potenciálu	$[\text{m}]$
$\Phi_n, \Psi_n$	Bázová funkce	$[-]$
$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi$	Složky vektorového potenciálu ve směrech $x_1, x_2, x_3, x_3$	$[\text{meter}]$
$\boldsymbol{\psi}$	Vektorový potenciál	$[\text{m}]$
$\Psi_w$	Funkce $x_2$ udávající amplitudu skalárního potenciálu	$[\text{m}]$
$\omega$	Úhlová frekvence	$[\text{rad s}^{-1}]$

## Seznam zkratk

IM	Iterační metody
MK	Metoda kontur
MSR	Metoda spektrálního rozkladu
NDT	Non Destructive Testing (česky nedestruktivní zkoušení)

# Úvod

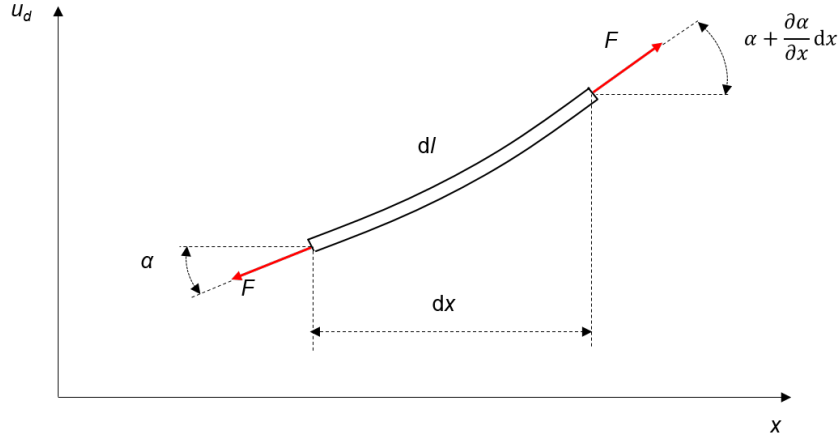
Problematika aplikace Lambových vln v technické praxi je bezesporu aktuálním tématem, jež zasahuje do mnoha vědních oblastí. Mezi nejrozšířenější aplikace se řadí využití těchto vln pro účely nedestruktivního zkoušení (NDT) deskovitých struktur. Před samotnou aplikací využívající Lambových vln je nicméně nutné navrhnout a následně verifikovat vhodnou metodiku zkoušení zahrnující mimo jiné výběr zkušební frekvence, způsobu buzení, apod. Obzvláště důležitým krokem je volba vhodného módu Lambovy vlny, jenž bude vykazovat nejvyšší citlivost na hledané nespojitosti. Pro tyto účely je nutné provést řadu numerických simulací využívajících metody konečných prvků, případně metody hraničních prvků [1]. Vedle konvenčních přístupů existují rovněž i metody založené na specifické vlastnosti Lambových vln, kterou je jejich ortogonalita [2], jež je posléze využita v modální expanzi Lambových vln. Díky uvedené vlastnosti vznikla řada modelů umožňujících predikovat interakci Lambových vln se specifickými typy nespojitostí [3, 4, 5]. Prakticky všechny tyto modely využívají ke své činnosti znalost vlnových čísel, a to reálných, ryze imaginárních či komplexních. Zejména v případě komplexních vlnových čísel je nutné vyzdvihnout jejich nemalý význam z důvodu zajištění energetické bilance v průběhu samotné realizace prediktivního výpočtu [6].

Předložená práce se zabývá metodami identifikace zejména komplexních kořenů disperzní vlnové rovnice Lambových vln ve formě komplexních vlnových čísel, a to s využitím dvou přístupů. Prvním uváděným přístupem je využití tzv. metody kontur v kombinaci s iterační metodou, která hledá kořeny ve formě průsečíků kontur reálné a imaginární složky hodnoty disperzní rovnice v reziduálním tvaru. Alternativním přístupem je užití metody spektrálního rozkladu, která je dílem francouzského matematika Vincenta Pagneux [7], díky níž je možné nalézt komplexní vlnová čísla řešením problému vlastních čísel.

# 1 Problematika šíření vln v kontinuu

## 1.1 Řídící vlnová rovnice pro napnutou strunu

Pro uvedení do problému šíření vln uvažujme element nekonečně dlouhé struny (obr. 1), kde výchylka struny  $u_d(x, t)$  je malá. Dle 2. Newtonova zákona platí pro tento element



Obrázek 1: Element napnuté struny [6]

pohybová rovnice ve tvaru

$$\sum F = m \ddot{u}_d = -F \sin(\alpha) + F \sin\left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx\right) . \quad (1.1)$$

Hmotnost elementu struny je možné vyjádřit vztahem  $m = \rho_l dx$ , kde symbol  $\rho_l$  značí délkovou hustotu. Za předpokladu malých deformací ( $dl \cong dx$ ,  $\sin(\alpha) \cong \alpha \cong \frac{\partial u_d}{\partial x}$ ) lze rovnici (1.1) zapsat ve tvaru:

$$-F \alpha + F\left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) = \rho_l dx \ddot{u}_d , \quad (1.2)$$

$$F \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} = \rho_l \ddot{u}_d , \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \ddot{u}_d , \quad (1.4)$$

kde  $c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$  vyjadřuje rychlost šíření vlny ve směru osy  $x$ . Řešení homogenní parciální diferenciální rovnice druhého řádu (1.4) je možné zapsat se separovanými proměnnými. Předpokládejme tedy tvar řešení

$$u_d(x, t) = X(x)T(t) , \quad (1.5)$$

díky kterému můžeme rovnici (1.4) po úpravách uvést ve tvaru [6]

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\ddot{T}}{T} = \text{konst.} = -k^2 . \quad (1.6)$$

Symbol  $k$  se nazývá vlnové číslo (někdy také úhlový vlnčet) a lze jej vyjádřit vztahem [6]

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} , \quad (1.7)$$

kde  $\lambda$  vyjadřuje vlnovou délku. Užitím vztahu pro úhlovou frekvenci  $\omega = 2\pi f$  a rychlost šíření vlny  $c_0 = f\lambda$  je možné vlnové číslo vyjádřit i ve tvaru

$$k = \frac{\omega}{c_0} . \quad (1.8)$$

Rovnici (1.5) lze alternativně zapsat v separovaném tvaru

$$X'' + k^2 X = 0 , \quad (1.9)$$

$$\ddot{T} + k^2 c_0^2 T = 0 , \quad (1.10)$$

kde část  $k^2 c_0^2$  můžeme užitím (1.8) nahradit druhou mocninou úhlové frekvence  $\omega$ . Řešením rovnic (1.9) a (1.10) obdržíme:

$$X(x) = J_1 \sin(kx) + J_2 \cos(kx) , \quad (1.11)$$

$$T(t) = J_3 \sin(\omega t) + J_4 \cos(\omega t) , \quad (1.12)$$

kde hodnoty konstant  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  a  $J_4$  závisí na okrajových podmínkách. Dosazením řešení (1.11) a (1.12) do rovnice (1.5) lze dospět k obecnému řešení v exponenciálním tvaru:

$$u_d(x, t) = J_1 \exp[i(kx + \omega t)] + J_2 \exp[-i(kx - \omega t)] . \quad (1.13)$$

Rovnice (1.13) popisuje dvě vlny, které se šíří v záporném (člen s  $J_1$ ), respektive kladném (člen s  $J_2$ ), směru osy  $x$  [6].

## 1.2 Komplexní vlnová čísla

Fyzikální význam komplexního vlnového čísla můžeme vysvětlit na příkladu napnuté struny, kdy budeme uvažovat vlnu šířící se pouze v jednom směru. Předpokládejme

vlnu, která se šíří v kladném směru osy  $x$ :

$$u_{s+}(x, t) = J_2 \exp[-i(kx - \omega t)] . \quad (1.14)$$

V případě komplexního vlnového čísla  $k = k_r + i k_{im}$  lze exponenciální část vztahu (1.14) rozvézt do tvaru

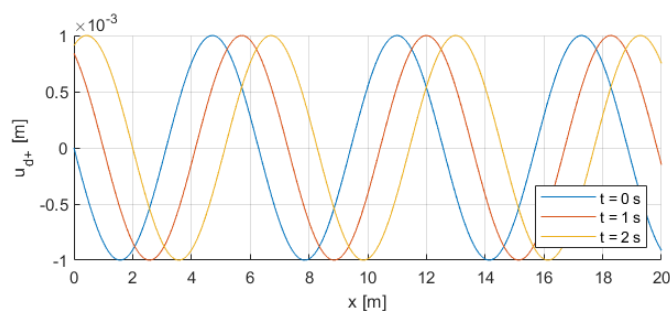
$$\begin{aligned} \exp[-i(kx - \omega t)] &= \exp\{-i[(k_r + i k_{im})x - \omega t]\} \\ &= \exp[-i(k_r x - \omega t)] \exp[k_{im} x] . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Z pohledu klasifikace chování vlny v závislosti na hodnotě imaginární složky komplexního čísla je možné uvažovat následující případy:

- 1)  $k_{Im} = 0$ , kdy vlna není tlumena a její amplituda zůstává s časem i polohou konstantní (viz obr. 2),
- 2)  $k_{Im} < 0$ , kdy amplituda vlny se vzrůstajícím parametrem polohy  $x$  exponenciálně klesá (viz obr. 3) – je tlumena nebo
- 3)  $k_{Im} > 0$ , ve kterém amplituda vlny se vzrůstajícím parametrem polohy  $x$  exponenciálně roste (viz obr. 4).

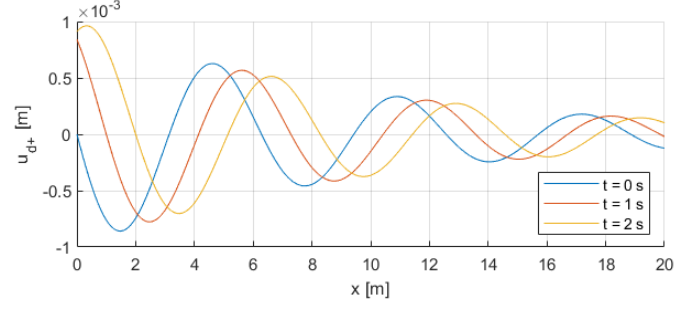
Poslední případ však nikdy nebyl pozorován [8].

V případě ryze imaginárního vlnového čísla (viz obr. 5), vztah výchylky (1.15) popisuje kmitání, které se však nebude danou strunou šířit (propagovat).

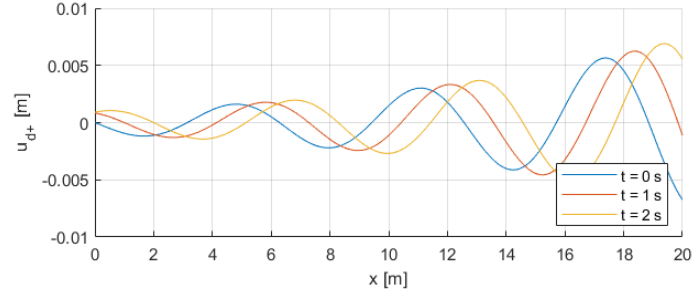


Obrázek 2: Posuvy  $u_{d+}$  při reálném vlnovém čísle vyjádřené pomocí kosinové funkce.

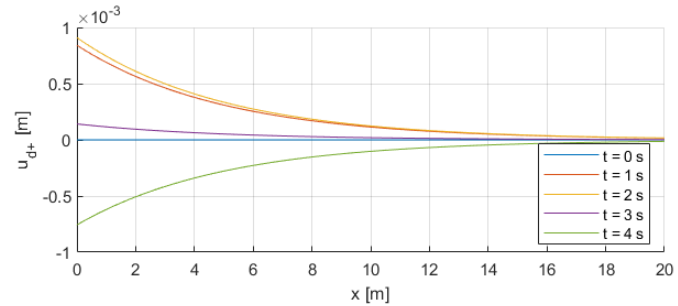
Vstupní parametry:  $J_2 = 1 \text{ m}$ ,  $k_{Re} = 1 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_{Im} = 0 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$



Obrázek 3: Posuvy  $u_{d+}$  při záporné imaginární složce vlnového čísla, které jsou vyjádřeny pomocí kosinové funkce. Vstupní parametry:  $J_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $k_{Re} = 1 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_{Im} = -0.1 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$



Obrázek 4: Posuvy  $u_{d+}$  při kladné imaginární složce vlnového čísla, které jsou vyjádřeny pomocí kosinové funkce. Vstupní parametry:  $J_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $k_{Re} = 1 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_{Im} = 0.1 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$



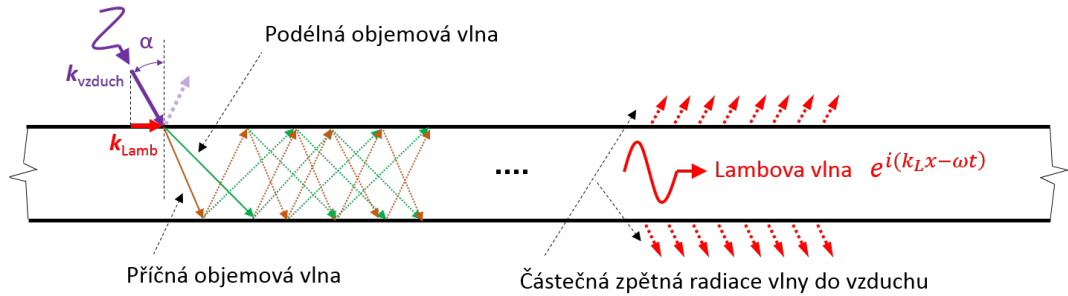
Obrázek 5: Posuvy  $u_{d+}$  při ryze imaginárním vlnovém čísle vyjádřené pomocí kosinové funkce. Vstupní parametry:  $J_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $k_{Re} = 0 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_{Im} = -0.2 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$



## 2 Lambovy vlny

Tento fenomén prvně publikoval anglický matematik Sir Horace Lamb, po kterém byly samotné Lambovy vlny pojmenovány. Jedná se o vlny, které vznikají v geometriích, jejichž jeden rozměr je výrazně menší než zbývající dva. S Lambovými vlnami se tedy můžeme setkat například na deskách a potrubích [6].

V důsledku interakcí podélných a příčných objemových vln, vzniká v dané geometrii mezi nezatíženými povrchy stojaté vlnění (obr. 6). Toto vlnění se následně šíří podél volného povrchu a nazýváme jej Lambovými vlnami. Zmíněné vlnění se na desce dané tloušťky projevuje vždy minimálně dvěma módy – symetrickým a asymetrickým (viz následující podkapitola) [6].

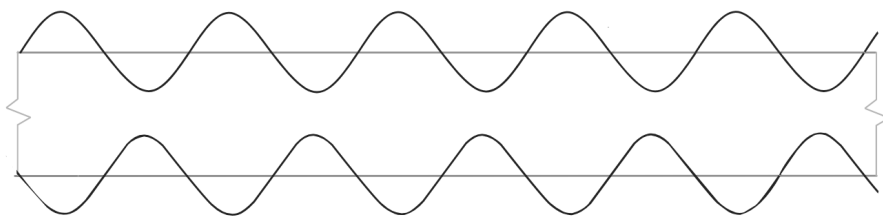


Obrázek 6: Princip vzniku Lambových vln užitím ultrazvukové předsádky [6]

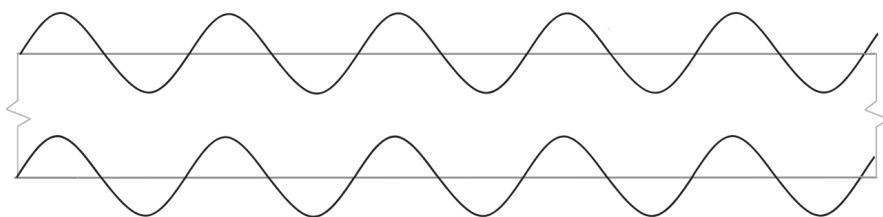
Oproti podélným a příčným vlnám, kde rychlost šíření vlny závisí na materiálu a frekvenci, rychlost šíření Lambovy vlny závisí i na tloušťce desky. Tuto závislost popisuje tzv. disperzní rovnice Lambových vln. Odvození a vysvětlení disperzní rovnice je uvedeno v podkapitole 2.2.

### 2.1 Módy Lambových vln

Jak už bylo zmíněno, Lambovy vlny se vždy vyskytují alespoň ve dvou módech. Vlnění, kde jsou posuvy vůči střednicové rovině geometrie symetrické, označujeme jako symetrické módy (obr. 7). U vlnění, kdy posuvy jsou vzhledem ke střednicové rovině asymetrické, naopak mluvíme o módech asymetrických (obr. 8).



Obrázek 7: Znázornění symetrického módů Lambových vln



Obrázek 8: Znázornění asymetrických módů Lambových vln

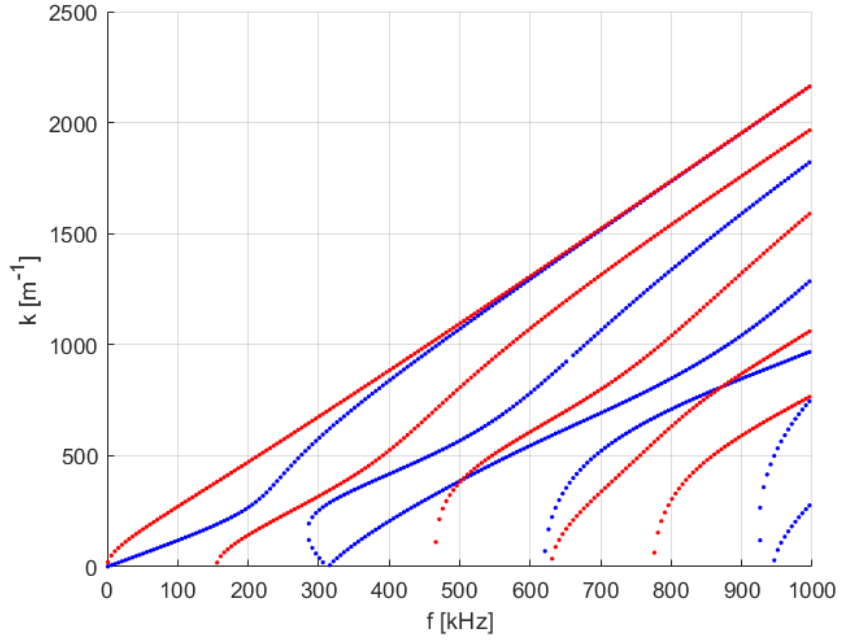
Počet módů, které se v dané geometrii vyskytují, je spjat s počtem řešení disperzních rovnic Lambových vln (viz podkapitola 2.2). Módy se standardně označují velkým písmenem  $S$  a  $A$ , tedy symetrický, respektive asymetrický mód, a číslem (případně číslem ve spodním indexu), které označují řád (komplexitu) módu.

Na obrázku 9 je vyobrazen průběh reálných vlnových čísel Lambových vln, kde můžeme, například pro frekvenci 500 kHz, identifikovat 3 symetrické a 3 asymetrické módy, jak je uvedeno v tabulce 1. Dále si všimněme, že pro nízké frekvence se ve struktuře vyskytují pouze dva fundamentální módy – módy  $S_0$  a  $A_0$ .

Označení módu	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$A_0$	$A_1$	$A_2$
$k \text{ [m}^{-1}\text{]}$	1074	567	388	1097	809	383

Tabulka 1: Hodnoty platných vlastních čísel pro  $f = 500 \text{ kHz}$  (viz obr. 9)

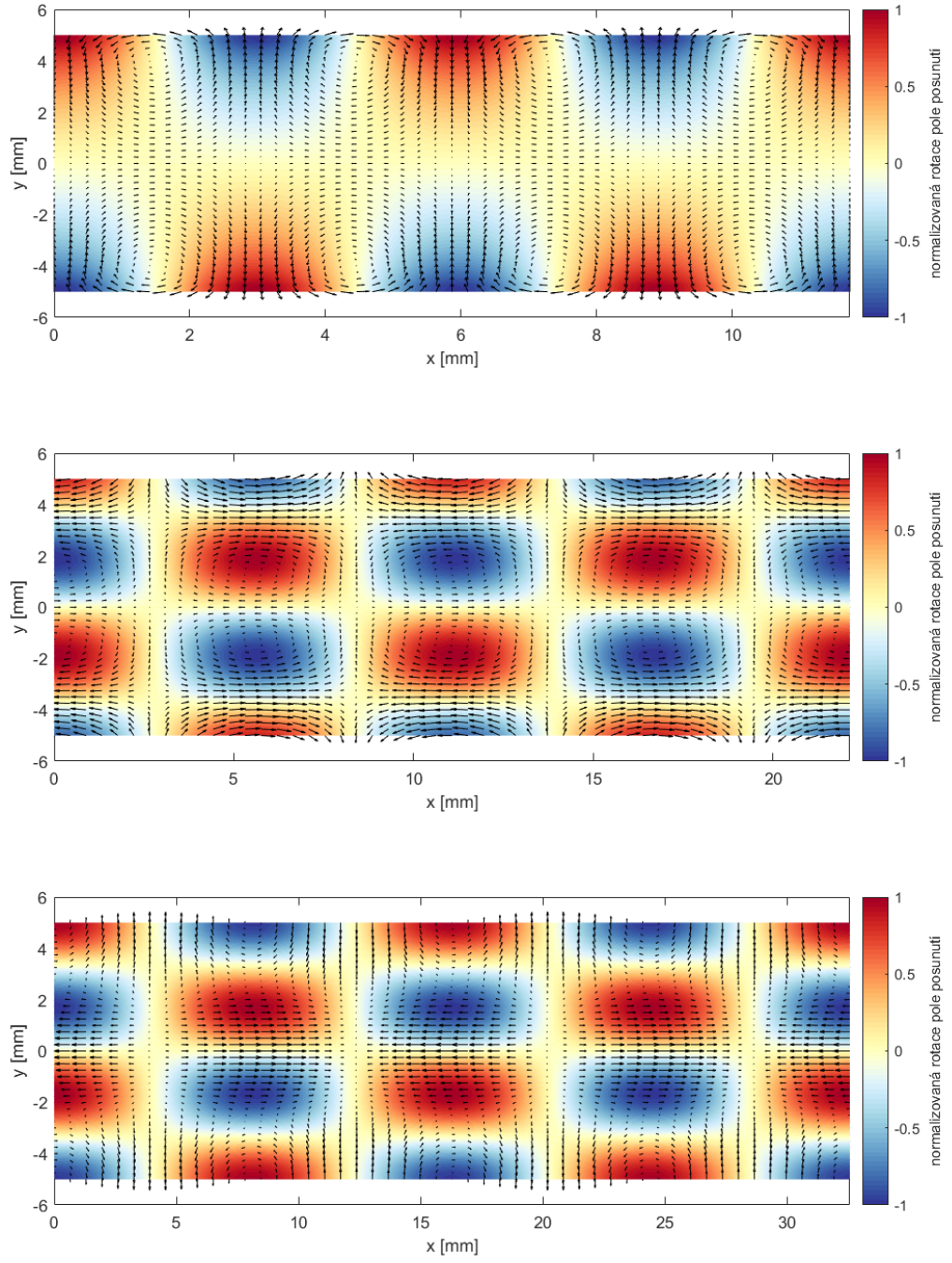
Struktura módů, uvedených v tabulce 1, je vyobrazena na obrázcích (10) a (11), kde naznačené vektory popisují normalizované pole posuvů, zatímco barevná škála znázorňuje normalizovanou rotaci vektorového pole posuvů. Podélný směr geometrie znázorňuje osa  $x$ , příčný směr (směr kolmý na střednicovou rovinu geometrie) je vykreslen



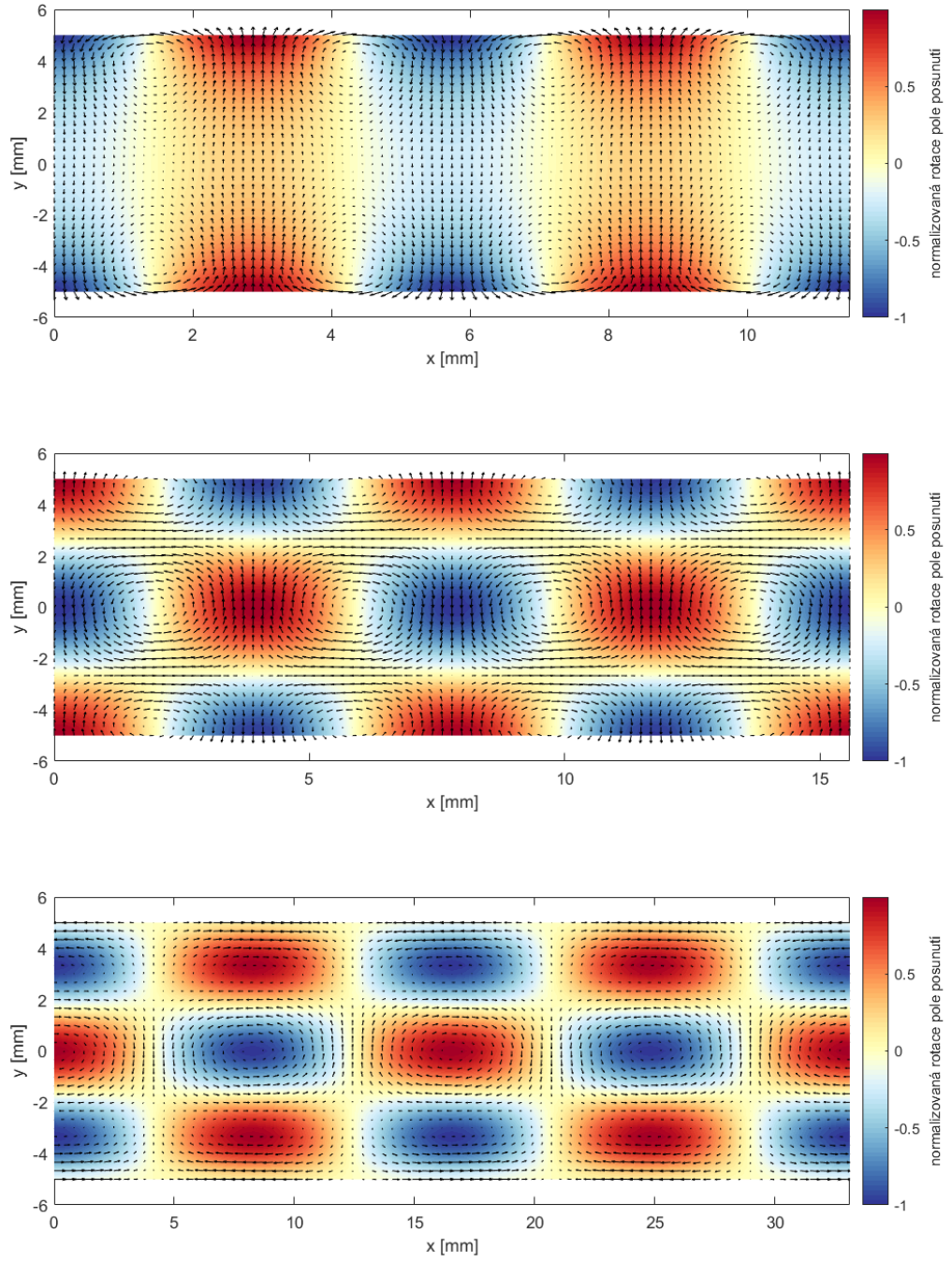
Obrázek 9: Reálné vlnová čísla Lambových vln pro vstupní parametry:  $c_L = 6300 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 3100 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 10 \text{ mm}$ . Modrá barva vyjadřuje symetrické módy, červená módy asymetrické.

prostřednictvím osy  $y$ . Uvedené obrázky názorně demonstrují symetričnost a asymetričnost módů podle střednicové roviny geometrie včetně výše zmíněné komplexnosti módů, která se s narůstajícím řádem módu zvyšuje.

Závěrem nastiňme význam hodnoty  $f t_G$ , která je uváděna u obrázků 10 a 11. Pokud bychom řešili disperzní rovnici pro jinou tloušťku a frekvenci, jejíž součin by však dával stejné hodnoty jako hodnoty na obrázcích 10 a 11, dostali bychom stejný počet módu a výsledné struktury by se shodovaly s těmi vyobrazenými.



Obrázek 10: Vizualizace symetrických módů S0, S1 a S2 (zobrazeny ve stejném pořadí).  
Vstupní parametry:  $c_L = 6300 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 3100 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 10 \text{ mm}$ ,  $\rho = 2660 \text{ kg m}^{-3}$ ,  
 $f = 500 \text{ kHz}$ ,  $f t_G = 5 \text{ MHz mm}$



Obrázek 11: Vizualizace asymetrických módů A0, A1 a A2 (zobrazeny ve stejném pořadí).  
Vstupní parametry:  $c_L = 6300 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 3100 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 10 \text{ mm}$ ,  $\rho = 2660 \text{ kg m}^{-3}$ ,  
 $f = 500 \text{ kHz}$ ,  $f t_G = 5 \text{ MHz mm}$

## 2.2 Odvození disperzní rovnice Lambových vln metodou potenciálů

Vyjdeme z rovnic rovnováhy, vyjádřené prostřednictvím vektoru posunutí, ve tvaru [9]

$$\mu \nabla^2 \mathbf{w} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho \ddot{\mathbf{w}}, \quad (2.1)$$

kde  $\mu$  a  $\lambda$  jsou Lamého konstanty,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ ,  $\mathbf{w} = (u \ v \ w)^T$  je vektor posunutí a  $\rho$  vyjadřuje hustotu materiálu. Lamého konstanty je možno vyjádřit na základě modulu pružnosti v tahu  $E$  a Poissonova čísla  $\nu$  pomocí vztahů [6]

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.2)$$

Myšlenkou metody potenciálu je nalezení řešení, které je díky Helmholtzově rozkladu přeformulováno do tvaru součtu nevírového a nezřídlového pole. Vektor posuvů zapíšeme ve tvaru [9]

$$\mathbf{w} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (2.3)$$

kde člen  $\nabla \varphi$  vyjadřuje zřídlové pole s nulovou rotací (podmínka nevírovosti pole). Člen  $\nabla \times \boldsymbol{\psi}$  naopak vyjadřuje vírové pole, jehož divergence je rovna nule – pole je tedy nezřídlové. Symboly  $\varphi$  a  $\boldsymbol{\psi}$  nazvěme skalárním, resp. vektorovým, potenciálem (případně potenciálovou funkcí). Pro lepší přehlednost zapíšeme vztah (2.3) i ve formě složek vektoru posunutí

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Dosazením uvedené formy jednotlivých složek vektoru posunutí (2.4) do rovnice (2.1) obdržíme následující výraz:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 [\nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}] + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot [\nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}]) = \\ = \rho [\nabla \ddot{\varphi} + \nabla \times \ddot{\boldsymbol{\psi}}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

ze kterého lze po uvážení nulové divergence vektorového pole  $\nabla \times \boldsymbol{\psi}$  vyjádřit rovnici

ve tvaru

$$\nabla \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \ddot{\varphi} \right] + \nabla \times \left[ \mu \nabla^2 \psi - \rho \ddot{\psi} \right] = 0. \quad (2.6)$$

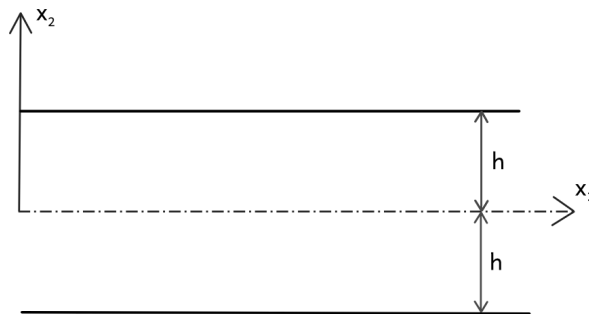
Nyní můžeme rovnici (2.6) rozdělit na případy, kdy  $\nabla \times \mathbf{w} = 0$  nebo  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ . V případě, kdy pole posuvů nerotuje můžeme očekávat řešení pro vlny podélné, naopak při nulové divergenci pole posuvů očekáváme řešení pro vlny příčné. Výsledné řídicí rovnice podélných a příčných vln tedy zapíšeme ve tvaru [8]

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\varphi}, \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\psi}, \quad (2.8)$$

kde  $c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$  a  $c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$  jsou druhé mocniny rychlostí podélných a příčných vln.

Pro odvození disperzní rovnice Lambových vln je doporučováno použít zjednodušení v podobě předpokladu rovinné deformace, jež je reprezentována volně uloženou nekonečnou deskou (viz obrázek 12) [10]. Užití tohoto zjednodušení má důsledek v podobě



Obrázek 12: Geometrie desky s vyznačeným souřadnicovým systémem. Osa  $x_3$  směřuje ke čtenáři a není znázorněna.

absence některých řešení. Konkrétně se jedná o horizontálně příčné módy Lambových vln [8]. V rovině  $x_1$ – $x_2$  tedy platí

$$w = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0. \quad (2.9)$$

Následně vztah (2.4) nabývá tvaru

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \\ 0 \end{Bmatrix} . \quad (2.10)$$

Jelikož v tomto vztahu figuruje z původního vektorového potenciálu  $\boldsymbol{\psi}$  již jen třetí komponenta, v dalším textu bude  $\psi_3$  značeno pouze jako  $\psi$ .

Pro aplikaci okrajových podmínek je nutné zavést složky tenzoru napjatosti, které popisují napětí na volném povrchu desky – napětí normálové a smykové. Dle zobecněného Hookeova zákona platí

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu \varepsilon_{ij} , \quad (2.11)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerova delta a  $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$  je stopa tenzoru přetvoření, v tomto případě Cauchyho. Ten je dán vztahem

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) , \quad (2.12)$$

kde indexová notace  $u_{i,j}$  reprezentuje derivaci členu  $u_i$  podle souřadnice  $x_j$ . pro rovinnou deformaci vztahy [10]. Složky pro normálové a smykové napětí nabývají po dosazení (2.10) do (2.11) tvaru

$$\sigma_{22} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial x_2} = \\ &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Na nezatíženém povrchu desky musí platit

$$\sigma_{22} \Big|_{x_2=\pm h} = \sigma_{21} \Big|_{x_2=\pm h} = 0 . \quad (2.15)$$

Jako řešení řídicích rovnic podélné (2.7) a příčné (2.8) vlny předpokládejme potenciálové funkce v následujícím tvaru:

$$\varphi = \Phi_w(x_2) \exp[i(kx_1 - \omega t)] , \quad (2.16)$$

$$\psi = \Psi_w(x_2) \exp[i(kx_1 - \omega t)] . \quad (2.17)$$



Dosazením vztahů (2.16) a (2.17) do diferenciálních rovnic (2.7), respektive (2.8), lze získat řešení ve tvaru

$$\Phi_w(x_2) = J_1 \sin(px_2) + J_2 \cos(px_2) , \quad (2.18)$$

$$\Psi_w(x_2) = L_1 \sin(qx_2) + L_2 \cos(qx_2) ,$$

kde  $J_1, J_2, L_1, L_2$  jsou skalární koeficienty. Při tomto dosazení je však třeba dbát zvýšené pozornosti, protože navržené řešení  $\psi$  je, jak bylo výše uvedeno, třetí složkou vektorového potenciálu  $\psi$ . Proměnné  $p, q$  nabývají hodnot

$$p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2} , \quad (2.19)$$

$$q = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2} \quad (2.20)$$

v závislosti na vlnovém čísle Lambových vln  $k$ , úhlové rychlosti  $\omega$  a rychlostech šíření podélné a příčné vlny (symboly  $c_L$  a  $c_T$ ).

Po dosazení navrženého řešení (2.16) do vztahů pro složky vektoru posunutí (2.3) a složky tenzoru napjatosti (2.13, 2.14) získáme vztahy:

$$u = \left( ik\Phi_w + \frac{d\Psi_w}{dx_2} \right) \exp[i(kx_1 - \omega t)] , \quad (2.21)$$

$$v = \left( \frac{d\Phi_w}{dx_2} - ik\Psi_w \right) \exp[i(kx_1 - \omega t)] , \quad (2.22)$$

$$\sigma_{21} = \mu \left( 2ik \frac{d\Phi_w}{dx_2} + k^2 \Psi_w + \frac{d^2 \Psi_w}{dx_2^2} \right) \exp[i(kx_1 - \omega t)] , \quad (2.23)$$

$$\sigma_{22} = \left[ \lambda \left( -k^2 \Phi_w + \frac{d^2 \Phi_w}{dx_2^2} \right) + 2\mu \left( \frac{d^2 \Phi_w}{dx_2^2} - ik \frac{d\Psi_w}{dx_2} \right) \right] \exp[i(kx_1 - \omega t)] , \quad (2.24)$$

popisující posuvy v jednotlivých osách, smykové a normálové napětí v závislosti na funkcích  $\Phi_w(x_2)$  a  $\Psi_w(x_2)$ .

Bližším zkoumáním předchozích vztahů a funkcí  $\Phi_w(x_2)$  a  $\Psi_w(x_2)$  (2.18) lze pozorovat, že výsledné vztahy je možné formulovat zvlášť pro symetrické a pro asymetrické módy. V následujících dvou podkapitolách jsou tyto výsledné vztahy rozepsány a vysvětleny.

### 2.2.1 Symetrické módy

Symetrické módy jsou charakterizovány symetrickým polem posuvů a napětí vzhledem ke střednicové rovině geometrie (viz podkapitola 2.1). Dosadíme-li funkce (2.18) do vztahu popisující posuv (2.21) a napětí (2.23) ve směru  $x$  (2.21), předpoklad symetričnosti splníme použitím členů obsahující kosinus. Podobně splníme symetričnost posuvů ve směru  $y$  dosazením (2.18) do (2.21) a (2.23) s následným výběrem sinových členů. Vztahy pro popis posuvů a napětí symetrických módů tedy nabývají tvarů:

$$u = ikJ_2 \cos(px_2) + qL_1 \cos(qx_2) , \quad (2.25)$$

$$v = -pJ_2 \sin(px_2) - ikL_1 \sin(qx_2) , \quad (2.26)$$

$$\sigma_{22} = -\lambda (k^2 + p^2) J_2 \cos(px_2) - 2\mu [p^2 J_2 \cos(px_2) + ikqL_1 \cos(qx_2)] , \quad (2.27)$$

$$\sigma_{21} = \mu [-2ikpJ_2 \sin(px_2) + (k^2 - q^2)L_1 \sin(qx_2)] , \quad (2.28)$$

kde byly členy  $\exp[i(kx_1 - \omega t)]$ , v zájmu přehlednosti, vynechány.

Využitím okrajových podmínek (3.8), jež vyjadřují nulové normálové a smykové napětí na volném povrchu desky, ve vztazích (2.27) a (2.28) můžeme dospět k homogenní soustavě rovnic

$$\begin{bmatrix} -[\lambda(k^2 + p^2) + 2\mu p^2] \cos(ph) & -2\mu ikq \cos(qh) \\ -2\mu ikp \sin(ph) & \mu(k^2 - q^2) \sin(qh) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} J_2 \\ L_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} , \quad (2.29)$$

která má netriviální řešení v případě

$$\begin{vmatrix} -[\lambda(k^2 + p^2) + 2\mu p^2] \cos(ph) & -2\mu ikq \cos(qh) \\ -2\mu ikp \sin(ph) & \mu(k^2 - q^2) \sin(qh) \end{vmatrix} = 0 . \quad (2.30)$$

Úpravami této rovnice získáme finální tvar disperzní rovnice Lambových vln pro symetrické módy

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} . \quad (2.31)$$

### 2.2.2 Asymetrické módy

Analogicky k postupu u symetrických módů, pro asymetrické módy můžeme výsledné vztahy pro posuny a napětí získat dosazením funkcí (2.18) do vztahů (2.21), (2.21), (2.23) a (2.23), přičemž vybíráme členy, které formují asymetrické pole. Dostáváme

tedy:

$$u = ikJ_1 \sin px_2 - qL_2 \sin qx_2 \quad , \quad (2.32)$$

$$v = pJ_1 \cos px_2 - ikL_2 \cos qx_2 \quad , \quad (2.33)$$

$$\sigma_{22} = -\lambda (k^2 + p^2) J_1 \sin px_2 - 2\mu [p^2 J_1 \sin px_2 + ikqL_2 \sin qx_2] \quad . \quad (2.34)$$

$$\sigma_{21} = \mu [2ikpJ_1 \cos px_2 + (k^2 - q^2)L_2 \cos qx_2] \quad . \quad (2.35)$$

kde byly, podobně jako u vztahů pro symetrické módy, členy  $\exp[i(kx_1 - \omega t)]$  v rámci přehlednosti vynechány.

Podobně jako u symetrických módů, vztahy pro normálové (2.34) a smykové (2.35) napětí lze po aplikaci okrajových podmínek (3.8) zapsat v podobě rovnice

$$\begin{bmatrix} -[\lambda(k^2 + p^2) + 2\mu p^2] \sin(ph) & +2\mu ikq \sin(qh) \\ 2\mu ikp \cos(ph) & \mu(k^2 - q^2) \cos(qh) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad . \quad (2.36)$$

Hledání netriviálního řešení této homogenní rovnice vyústí ve výsledný tvar disperzní rovnice pro asymetrické módy Lambových vln

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq} \quad . \quad (2.37)$$

### 2.2.3 Řešení disperzní rovnice

Disperzní rovnice Lambových vln pro symetrické (2.31) a asymetrické (2.37) módy je tzv. transcendentní rovnicí, kdy její řešení nelze zapsat v uzavřeném tvaru a může ležet jak v reálném, tak komplexním oboru [6].

Numerickým řešením disperzní rovnice můžeme ukázat, že kořeny rovnice jsou uspořádány ve čtveřicích, které tvoří symetrii kolem reálné a imaginární osy. Symetrie kolem imaginární osy můžeme vysvětlit existencí vlnových čísel pro kladný i záporný směr šíření vlny. Komplexně sdružená řešení (symetrické kolem reálné osy) poskytují dvojici vlnových čísel, která popisuje exponenciálně rostoucí, respektive klesající, vlnu. Z důvodu přehlednosti se v literatuře často uvádí jen řešení v prvním kvadrantu. Vlnová čísla uváděná v této práci budou vyobrazena v souladu s touto zvyklostí.

## 2.3 Praktické využití Lambových vln

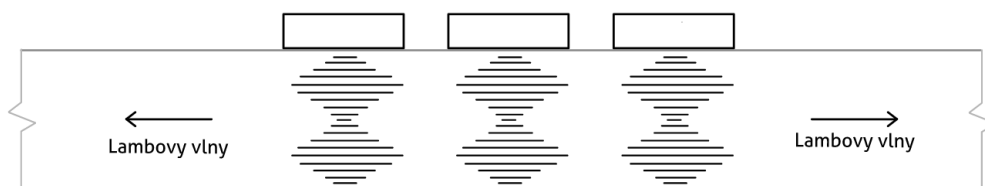
Jak již bylo zmíněno, Lambovy vlny je možné vybudit v deskovitých strukturách (např. plechy a potrubí), což je předurčuje k využití v oblasti ultrazvukového nedestruktivního zkoušení (NDT), kde se mimochodem těší velké oblibě.

Typickým příkladem využití Lambových vln je kontrola potrubí na korozi a defekty. Pomocí prstencového měniče (obr. 13) lze ve stěnách potrubí vybudit Lambovy vlny, které se šíří v obou směrech na vzdálenost až padesáti metrů [11] a následně se odrážejí od nespojitostí (vad).

Zmíněný prstenec používá soubor tzv. hřebenových měničů (anglicky comb transducer) rozmístěných rovnoběžně podél obvodu trubky, které ve stěně trubky generují stojaté vlny. Tyto vlny se následně šíří podél trubky ve formě Lambových vln (obr. 14) [12].



Obrázek 13: EFC nafukovací prstenec na kontrolovaném potrubí [11]

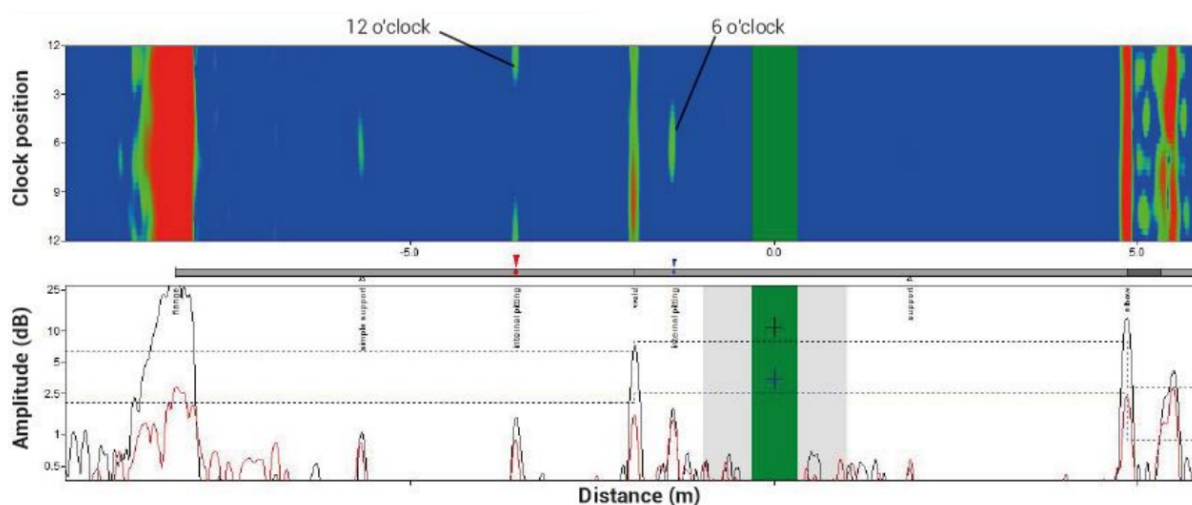


Obrázek 14: Alternativní způsob vybudění Lambových vln užitím tzv. hřebenového měniče.

Schopnost odhalovat defekty i ve velkých vzdálenostech je hlavní výhodou této NDT metody. Představme si například potrubí prostupující zemí či stěnou, anebo izolované potrubí, kde bude nutné obnažit jen oblast pro umístění měřícího prstence.

Lokalizace vad je prováděna na základě časové prodlevy mezi vyslaným signálem a obdrženou odezvou. Je tedy nutné znát rychlost šíření Lambových vln pro daný materiál, frekvenci a geometrii. Jinými slovy je nutné znát řešení disperzní rovnice, kterým se zabývá tato diplomová práce.

Výsledkem měření pomocí měřicího prstence je průběh amplitudy odrazů v závislosti na poloze případných nespojitostí. Na ukázce výsledku zkoušky (obr. 15) jsou označeny vady (konkrétně bodové koroze [11]) ve vzdálenostech přibližně 1,5 a 4 metrů od měřicího prstence. Horní graf zobrazuje tzv. C sken, zatím co spodní graf zobrazuje tzv. A sken.



Obrázek 15: Výsledky kontroly potrubí [11]

### 3 Numerické řešení disperzní rovnice

I přes relativně jednoduchý tvar disperzních rovnic, lze k jejich řešení dospět jen za pomoci numerických metod, jenž jsou hlavní náplní praktické části této práce.

V případě reálných nebo ryze imaginárních vlnových čísel můžeme, pro danou frekvenci, nalézt řešení disperzní rovnice tzv. metodou uzavorkování (anglicky bracketing method). Metoda spočívá v hledání intervalů, na kterých hodnota reziduálního tvaru disperzní rovnice (2.31), případně (2.37), změní znaménko. Po odfiltrování intervalů, kde změna znaménka vznikla v důsledku nespojitostí, dostáváme řešení v podobě reálných, případně ryze imaginárních, vlnových čísel. Ukázka výsledných reálných vlnových čísel na rozsahu frekvencí 1 kHz až 1000 kHz je vykreslena na obrázku 9.

Cílem následujících podkapitol je přiblížit dvě principiálně rozdílné metody identifikace, v tomto případě komplexních vlnových čísel, včetně jejich možné implementace do prostředí software Matlab. Předložená kapitola bude zakončena praktickými příklady identifikace komplexních vlnových čísel s využitím obou prezentovaných metod.

#### 3.1 Metoda kontur

Princip metody spočívá v nalezení 2D oblasti, ve které hodnota disperzní rovnice v reziduálním tvaru mění znaménko. Změna znaménka může být obecně zapříčiněna existencí řešení či vyskytující se nespojitostí. Nalezená řešení jsou pouze přibližná, s využitím iteračních metod je však můžeme zpřesnit dle zvolené tolerance.

Nejprve si vyjádříme disperzní rovnice Lambových vln pro symetrické (2.31) a asymetrické (2.37) módy, a to v reziduálních tvarech

$$R^s(k, f) = \frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} + \frac{4pk^2}{(q^2 - k^2)^2} , \quad (3.1)$$

$$R^a(k, f) = q \tan(qh) + \frac{(q^2 - k^2)^2 \tan(ph)}{4pk^2} , \quad (3.2)$$

kde horní indexy  $s$  a  $a$  označují symetrické, respektive asymetrické, módy. Připomeňme, že proměnné  $p$  a  $q$  jsou dány vztahy (2.19), respektive (2.20), a jsou funkcí vlnového čísla  $k$  a frekvence  $f$ .

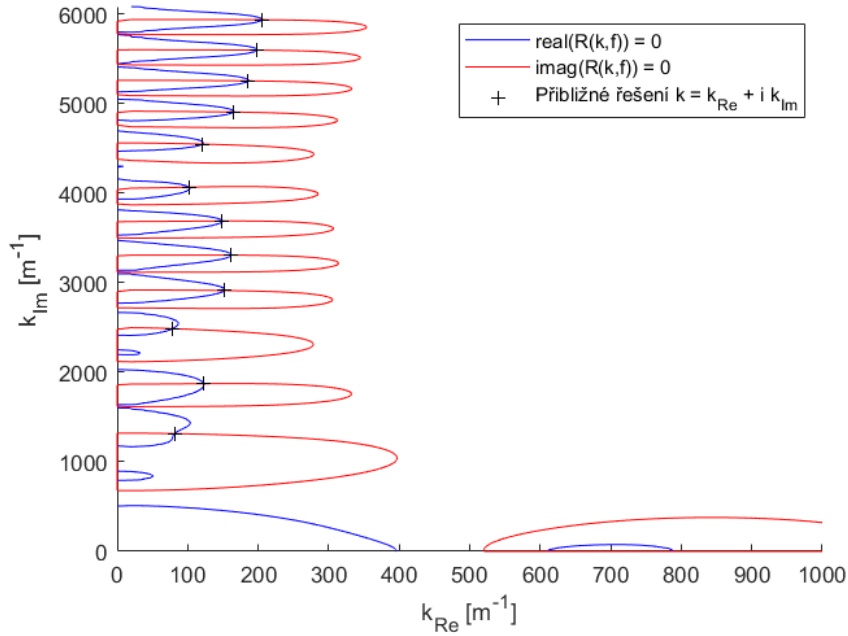
Jelikož disperzní rovnice nemá řešení v uzavřené formě (je tzv. transcendentní), reálná a imaginární část řešení je vzájemně závislá a nelze je řešit odděleně [6]. Pro

kořen disperzní rovnice tedy musí platit

$$\operatorname{Re}(R(k, f)) = 0 \wedge \operatorname{Im}(R(k, f)) = 0, \quad (3.3)$$

kde  $R(k, f)$  je disperzní rovnice v reziduálním tvaru pro symetrické (3.1), případně asymetrické (3.2) módy.

Pro zvolenou frekvenci tedy diskretizujeme oblast, na které předpokládáme výskyt požadovaného počtu módů, a to se zvolenou velikostí kroku. Následně vyčíslíme hodnoty reziduálního tvaru disperzní rovnice (3.1) či (3.2). Nyní můžeme vykreslit kontury, kde reálná, respektive imaginární, část rezidua nabývá nulové hodnoty. Průsečíky těchto křivek dávají přibližná řešení v podobě reálných a imaginárních složek komplexních vlnových čísel. Ilustrační příklad tohoto postupu je uveden na obrázku 16.



Obrázek 16: Znáznornění metody kontur pro symetrické módy. Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 20 \text{ mm}$ ,  $f = 985 \text{ kHz}$

### 3.2 Zvýšení přesnosti vlastních čísel pomocí iteračních metod

Pro získání výsledků s požadovanou přesností je použita funkce `fsolve` z optimalizační sady nástrojů softwaru Matlab, která umožňuje použít iterační metodu (zkráceně IM) typu trust region, konkrétně metodu označovanou jako `dogleg` [13]. Pro hodnoty, které jsou v této práci uváděny jako zpřesněné pomocí iteračních metod, byly použity

následující tolerance:

- tolerance funkční hodnoty  $1 \cdot 10^{-14}$ ,
- tolerance délky kroku iterace  $1 \cdot 10^{-14}$ .

Pomocí funkce `fsolve` budeme řešit disperzní rovnici (3.1) nebo (3.2) v reziduálním tvaru, a to jako následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R(k, f)) &\cong 0 \\ \operatorname{Im}(R(k, f)) &\cong 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde jako počáteční hodnotu vlnového čísla použijeme přibližné řešení. Připomeňme také, že frekvence  $f$  bude při hledání zpřesněných hodnoty komplexních vlnových čísel konstantou.

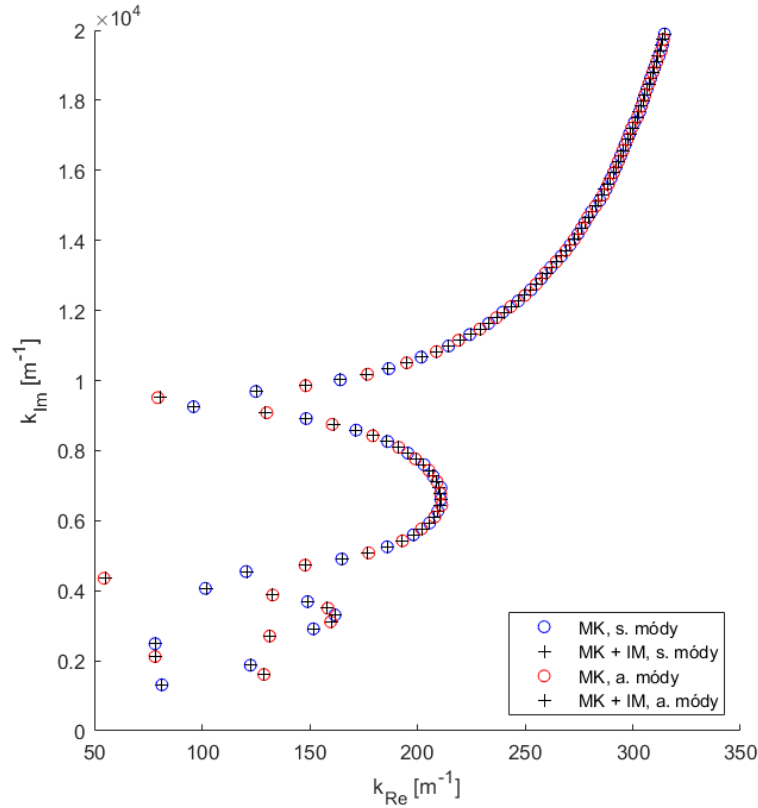
### 3.2.1 Zhodnocení metody a jejích výsledků

Metodu kontur (MK) můžeme označit za jednoduchou a názornou, nicméně relativně pomalou. Výsledná řešení v podobě komplexních vlnových čísel jsou vyobrazeny na obrázku 17 jak pro symetrické, tak asymetrické módy.

Značnou nevýhodou metody je předběžná neznalost velikosti oblasti, na které se vyskytuje požadovaný počet vlnových čísel. Obvykle tedy nejprve volíme oblast menší a následně ji rozšiřujeme, dokud neobdržíme požadovaný počet komplexních vlnových čísel. Dalším úskalím metody je volba kroku diskretizace, kdy při nevhodné velikosti kroku může metoda selhat. Nutná je tedy i vizuální kontrola tvaru kontur.

Dále zmiňme vlastnost disperzní rovnice, kdy s klesající tloušťkou geometrie narůstá velikost plochy, na které se požadovaný počet vlnových čísel vyskytuje, což prodlužuje výpočetní čas (viz podkapitola 3.4). Obdobné chování můžeme pozorovat i při snižující se frekvenci.





Obrázek 17: Komplexní vlnová čísla symetrických i asymetrických módů Lambových vln, spočtená metodou kontur, zpřesněna pomocí iteračních metod. Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 20 \text{ mm}$ ,  $f = 985 \text{ kHz}$

### 3.2.2 Poznámky k implementaci

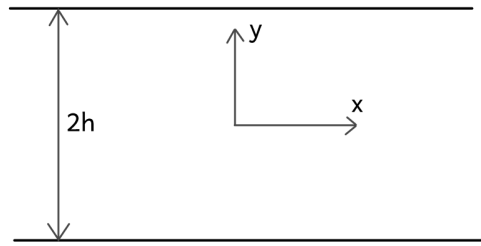
Implementaci můžeme rozdělit do následujících kroků:

1. zvolme oblast, na které budeme hledat komplexní vlnová čísla pro danou frekvenci
2. diskretizujme tuto oblast dle zvolené velikosti kroku
3. vyčíslíme hodnoty reziduálních tvarů disperzních rovnic
4. vykresleme kontury  $\text{Re}(R(k, f)) = 0$  a  $\text{Im}(R(k, f)) = 0$  pomocí funkce `contour`
5. najděme průsečíky těchto kontur např. pomocí funkce `intersections` [14], jejichž souřadnice jsou reálnými a imaginárními složkami přibližného řešení
6. zvyšme přesnost přibližného řešení pomocí iteračních metod (viz podkapitola 3.2)

### 3.3 Metoda spektrálního rozkladu

Další metodou, kterou je možno aplikovat pro získání komplexních vlastních čísel je metoda, která byla prvně prezentována Vincentem Pagneuxem [7]. Je založená na projekci řídicí (lineární diferenciální) rovnice Lambových vln na spektrální báze tvořené ortogonálními funkcemi. Tímto způsobem lze problém přeformulovat na problém vlastních čísel  $(M - kI)\mathbf{X} = 0$ , kde matice  $M$  je produktem zmíněné projekce. Jak sám autor této metody zmiňuje, metoda spektrálního rozkladu je vhodná především pro generaci počátečních odhadů hodnot komplexních vlnových čísel Lambových vln. Pro získání hodnot s předepsanou přesností doporučuje použití iteračních metod [7].

Odvození této metody platí pro následující geometrii (obr. 18), kde deska má tloušťku  $2h$  a obě plochy jsou nezátížené. Lambovy vlny se tímto budou šířit geometrií danou rozhraními  $-h \leq y \leq h$ .



Obrázek 18: Geometrie pro kterou je metoda odvozena

Vycházíme ze vztahu (2.1), kdy předpokládáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(y) \exp[i(kx - \omega t)] . \quad (3.5)$$

Na základě předpokládané časové závislosti ve tvaru  $\exp(-i\omega t)$  lze rovnici (2.1) přepsat do formy:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{w} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = -\rho \omega^2 \mathbf{w} . \quad (3.6)$$

Jelikož jsou předmětem zájmu komplexní vlnová čísla a z nich vyplývající vlastnosti Lambových vln, je možné člen, závislý na čase, vynechat. Vektor posunutí (3.5) je pak možno zapsat ve tvaru

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \hat{u}(x, y) \\ \hat{v}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(y) \\ v(y) \end{Bmatrix} \exp(ikx) , \quad (3.7)$$

který označíme jako vektor modální.

### 3.3.1 Okrajové podmínky

Na základě obecného Hookeova zákona ve tvaru (2.11), kde přetvoření jsou dána Cauchyho tenzorem deformace (2.12) lze předepsat okrajové podmínky na nezatížených površích desky následovně

$$\begin{aligned}\sigma_{12}(x, \pm h) &= \mu \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \right) = 0 , \\ \sigma_{22}(x, \pm h) &= \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} = 0 .\end{aligned}\tag{3.8}$$

### 3.3.2 Řídící rovnice Lambových vln

V prvním kroku zavedeme veličiny

$$k_t = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega ,\tag{3.9}$$

$$k_l = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \omega ,\tag{3.10}$$

$$\gamma = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} ,\tag{3.11}$$

které mají následující fyzikální význam:  $k_t$  je vlnové číslo pro příčnou vlnu,  $k_l$  vlnové číslo pro vlnu podélnou a  $\gamma$  vyjadřuje podíl druhých mocnin rychlosti podélné vlny a rychlosti vlny příčné.

Dosazením vztahů (3.9), (3.10), (3.11) a posuvů (3.7) do řídicí rovnice Lambových vln (3.6) lze získat soustavu tvořenou řídicími rovnicemi Lambových vln pro složky posuvů  $u$  a  $v$  ve tvaru

$$k^2 u - ik \frac{\gamma - 1}{\gamma} v' - \left( k_l^2 u + \frac{u''}{\gamma} \right) = 0 ,\tag{3.12}$$

$$k^2 v - ik(\gamma - 1)u' - (k_t^2 v + \gamma v'') = 0 ,\tag{3.13}$$

což je z matematického pohledu soustava dvou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. Okrajové podmínky (3.8) po užití vztahu (3.11) a drobných úpravách nabývají tvaru

$$u'(\pm h) = -ikv(\pm h) ,\tag{3.14}$$

$$v'(\pm h) = -ik \frac{\gamma - 2}{\gamma} u(\pm h) . \quad (3.15)$$

### 3.3.3 Spektrální rozklad

Řešení rovnic Lambových módu je možné rozdělit na symetrické a asymetrické řešení a toto řešení aproximovat bázovými funkcemi. Příslušnost symbolů k symetrickému a asymetrickému řešení je v textu označena pomocí horních indexů „s“, respektive „a“. Bázové funkce  $\Phi_n$  pro  $u^s, v^a$  a  $\Psi_n$  pro  $v^s, u^a$  musí být pro  $n \geq 1$  řešením soustavy [7]

$$\begin{aligned} \Phi_n'' + \alpha_n^2 \Phi_n &= 0 , \\ \Psi_n'' + \beta_n^2 \Psi_n &= 0 , \end{aligned} \quad (3.16)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \Phi_n'(0) = \Phi_n'(h) &= 0 , \\ \Psi_n(0) = \Psi_n'(h) &= 0 , \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde  $n$  značí  $n$ -tou bázovou funkci. Jejich počet  $N$  se volí v závislosti na počtu požadovaných komplexních vlnových čísel. Řešení soustavy (3.16) společně s okrajovými podmínkami (3.17) dává následující bázové funkce

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \sqrt{\frac{\epsilon_n}{h}} \cos(\alpha_n y) , \quad \text{kde} \begin{cases} \epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_n = 2 \text{ pro } n \geq 2, \\ \alpha_n = \frac{(n-1)\pi}{h} , \end{cases} \\ \Psi_n &= \sqrt{\frac{2}{h}} \sin(\beta_n y) , \quad \text{kde} \quad \beta_n = \frac{(n-1/2)\pi}{h} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tyto bázové funkce mají vlastnost, kdy pro skalární součin<sup>1</sup> platí:

$$(\Phi_m | \Phi_n) = \delta_{mn} , \quad (\Psi_m | \Psi_n) = \delta_{mn} . \quad (3.19)$$

Dále je důležité zmínit, že dolní indexy  $m$  a  $n$  označují řádky, respektive sloupce. Toto bude platit i pro matice níže.

Bázové funkce  $\Phi_n$  a  $\Psi_n$  tvoří úplnou bázi, kterými je možno popsat jakékoliv sudé

---

<sup>1</sup>Jedná se o skalární součin funkcí, kdy  $(f|g) = \int_0^h f(y)g(y)dy$  a v cizojazyčné literatuře bývá často označován jako „inner product“ nebo „scalar product“.

a liché funkce [7]. Symetrické i asymetrické řešení je tedy možné rozložit následovně:

$$\begin{aligned}
u^s(y) &= \sum_{n \geq 1} U_n^s \Phi_n(y) \quad a \quad \mathbf{U}^s = (U_n^s) , \\
v^s(y) &= \sum_{n \geq 1} V_n^s \Psi_n(y) \quad a \quad \mathbf{V}^s = (V_n^s) , \\
u^a(y) &= \sum_{n \geq 1} U_n^a \Phi_n(y) \quad a \quad \mathbf{U}^a = (U_n^a) , \\
v^a(y) &= \sum_{n \geq 1} V_n^a \Psi_n(y) \quad a \quad \mathbf{V}^a = (V_n^a) ,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

kde  $\mathbf{U}^s$ ,  $\mathbf{V}^s$ ,  $\mathbf{U}^a$  a  $\mathbf{V}^a$  jsou vektory koeficientů. Horní indexy  $s$  a  $a$  značí řešení symetrické a asymetrické.

### 3.3.4 Symetrické módy

Pro získání komplexních vlnových čísel pro symetrický mód Lambových vln je potřeba řešení (3.20) dosadit do řídicích rovnic Lambových vln (3.12) a (3.13). Následně provedeme projekci (3.12) do bázevých funkcí  $\Phi_n$ , a dále projekci rovnice (3.13) do bázevých funkcí  $\Psi_n$ . Po dosazení, provedení skalárního součinu a drobných úpravách lze získat rovnice ve tvaru

$$k^2 \sum_{m \geq 1} U_m^s (\Phi_m | \Phi_n) - ik \frac{\gamma - 1}{\gamma} ((v^s)' | \Phi_n) - \left( k_t^2 \sum_{m \geq 1} U_m^s (\Phi_m | \Phi_n) + \frac{1}{\gamma} ((u^s)'' | \Phi_n) \right) = 0 , \tag{3.21}$$

$$k^2 \sum_{m \geq 1} V_m^s (\Psi_m | \Psi_n) - ik(\gamma - 1) ((u^s)' | \Psi_n) - \left( k_t^2 \sum_{m \geq 1} V_m^s (\Psi_m | \Psi_n) + \gamma ((v^s)'' | \Psi_n) \right) = 0 . \tag{3.22}$$

Podotkněme, že členy obsahující derivaci lze patřičně zjednodušit prostřednictvím per partes, okrajovými podmínkami (3.17) a samotnou vlastností bázevých funkcí (3.19).

Tyto členy tedy nabývají tvarů:

$$\begin{aligned}
((v^s)'|\Phi_n) &= [v^s\Phi_n]_0^h - (v^s|\Phi_n') \\
&= \sum_{m \geq 1} (\Psi_m(h)\Phi_n(h) - (\Psi_m|\Phi_n'))V_m^s , \\
((u^s)''|\Phi_n) &= [(u^s)'\Phi_n - u^s\Phi_n']_0^h + (u^s|\Phi_n'') \\
&= -ik \sum_{m \geq 1} \Psi_m(h)\Phi_n(h)V_m^s - \alpha_m^2 U_m^s , \\
((u^s)'|\Psi_n) &= [u^s\Psi_n]_0^h - (u^s|\Psi_n') \\
&= \sum_{m \geq 1} (\Phi_m(h)\Psi_n(h) - (\Phi_m|\Psi_n'))U_m^s , \\
((v^s)''|\Psi_n) &= [(v^s)'\Psi_n - v^s\Psi_n']_0^h + (v^s|\Psi_n'') \\
&= -ik \frac{\gamma - 2}{\gamma} \sum_{m \geq 1} \Phi_m(h)\Psi_n(h)U_m^s - \beta_m^2 V_m^s .
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Dosazením (3.23) do rovnic (3.21) a (3.22) získáme soustavu algebraických homogenních rovnic

$$\begin{aligned}
k^2 \mathbf{U}^s + k A^s \mathbf{V}^s + B^s \mathbf{U}^s &= 0 , \\
k^2 \mathbf{V}^s + k C^s \mathbf{U}^s + D^s \mathbf{V}^s &= 0 ,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

kde  $A^s$ ,  $B^s$ ,  $C^s$  a  $D^s$  jsou matice tvořené prvky

$$\begin{aligned}
A_{m,n}^s &= i \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\Psi_m|\Phi_n') + \frac{2 - \gamma}{\gamma} \Psi_m(h)\Phi_n(h) \right) \\
&= \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}i(2-\gamma)(-1)^m}{h\gamma} & \text{pro } n = 1 , \\ -\frac{2i(-1)^{m+n}(\alpha_n^2 + (\gamma-2)\beta_m^2)}{h\gamma(\beta_m^2 - \alpha_n^2)} & \text{pro } n \geq 2 , \end{cases} \\
B_{m,n}^s &= \left( \frac{\alpha_m^2}{\gamma} - k_l^2 \right) \delta_{mn} , \\
C_{m,n}^s &= -\gamma A_{n,m}^s
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}i(2-\gamma)(-1)^n}{h} & \text{pro } m = 1 , \\ \frac{2i(-1)^{m+n}(\alpha_m^2 + (\gamma-2)\beta_n^2)}{h(\beta_n^2 - \alpha_m^2)} & \text{pro } m \geq 2 , \end{cases}$$

$$D_{m,n}^s = (\gamma\beta_m^2 - k_t^2)\delta_{mn} \quad . \quad (3.25)$$

Rovnice soustavy (3.24) tvoří takzvaný kvadratický problém vlastních čísel („quadratic eigenvalue problem“, zkráceně „qep“). Odvozené matice (3.25) se liší od původního řešení [7] ve znaménkách u matic  $A^s$  a  $C^s$ . Výsledné vlastní čísla nicméně zůstávají stejná z důvodu symetrie (viz podkapitola 3.3.7).

### 3.3.5 Antisymetrické módy

Podobně jako u symetrických módů, do řídicích rovnic Lambových módů (3.12) a (3.13) je tentokrát dosazeno řešení (3.20). Získané rovnice jsou poté promítány následovně: rovnice (3.12) do  $\Psi_n$ , rovnice (3.13) do  $\Phi_n$ . Pro zjednodušení členů s derivacemi jsou použity vztahy

$$\begin{aligned} ((v^a)'|\Psi_n) &= [v^a\Psi_n]_0^h - (v^a|\Psi_n') \\ &= \sum_{m \geq 1} (\Phi_m(h)\Psi_n(h) - (\Phi_m|\Psi_n'))V_m^a \quad , \\ ((u^a)''|\Psi_n) &= [(u^a)'\Psi_n - u^a\Psi_n']_0^h + (u^a|\Psi_n'') \\ &= -ik \sum_{m \geq 1} \Phi_m(h)\Psi_n(h)V_m^a - \beta_m^2 U_m^a \quad , \\ ((u^a)'|\Phi_n) &= [u^a\Phi_n]_0^h - (u^a|\Phi_n') \\ &= \sum_{m \geq 1} (\Psi_m(h)\Phi_n(h) - (\Psi_m|\Phi_n'))U_m^a \quad , \\ ((v^a)''|\Phi_n) &= [(v^a)'\Phi_n - v^a\Phi_n']_0^h + (v^a|\Phi_n'') \\ &= -ik \frac{\gamma - 2}{\gamma} \sum_{m \geq 1} \Psi_m(h)\Phi_n(h)U_m^a - \alpha_m^2 V_m^a \quad , \end{aligned} \quad (3.26)$$

které byly odvozeny analogickým postupem jako v případě symetrických módů.

Algebraické rovnice kvadratického problému vlastních čísel pro asymetrické módy Lambových vln nabývají tvaru

$$\begin{aligned} k^2 \mathbf{U}^a + kA^a \mathbf{V}^a + B^a \mathbf{U}^a &= 0 \quad , \\ k^2 \mathbf{V}^a + kC^a \mathbf{U}^a + D^a \mathbf{V}^a &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.27)$$

kde matice  $A^a$ ,  $B^a$ ,  $C^a$  a  $D^a$  obsahují prvky

$$\begin{aligned}
A_{m,n}^a &= i \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} (\Phi_m | \Psi_n') + \frac{2-\gamma}{\gamma} \Phi_m(h) \Psi_n(h) \right) \\
&= \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}i(-1)^n}{h\gamma} & \text{pro } m=1, \\ -\frac{2i(-1)^{m+n}((\gamma-2)\alpha_m^2 + \beta_n^2)}{h\gamma(\beta_m^2 - \alpha_n^2)} & \text{pro } m \geq 2, \end{cases} \\
B_{m,n}^a &= \left( \frac{\beta_m^2}{\gamma} - k_l^2 \right) \delta_{mn}, \\
C_{m,n}^a &= -\gamma A_{n,m}^a, \\
&= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}i(-1)^m}{h} & \text{pro } n=1, \\ \frac{2i(-1)^{m+n}((\gamma-2)\alpha_n^2 + \beta_m^2)}{h(\beta_n^2 - \alpha_m^2)} & \text{pro } n \geq 2, \end{cases} \\
D_{m,n}^a &= (\gamma\alpha_m^2 - k_t^2) \delta_{mn},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Vztahy pro matice  $A^a$  a  $C^a$  se oproti referenční literatuře [7] liší ve znaménkách – podobně, jako v případě symetrických módů.

### 3.3.6 Linearizace kvadratického problému vlastních čísel

Rovnice pro symetrické (3.24) a asymetrické (3.27) módy Lambových vln tedy nabývají následujícího tvaru:

$$\begin{aligned}
k^2 \mathbf{U} + k \mathbf{A} \mathbf{V}^a + B \mathbf{U} &= 0, \\
k^2 \mathbf{V} + k \mathbf{C} \mathbf{U}^a + D \mathbf{V} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

přičemž postup pro jejich řešení je stejný. Linearizací lze tento problém převést na klasický problém vlastních čísel

$$(M - \lambda I) \mathbf{X} = 0.$$

Soustavu (3.29) lze zapsat ve tvaru

$$k^2 \mathbf{X}_1 + k F_1 \mathbf{X}_1 + G_1 \mathbf{X}_1 = 0, \tag{3.30}$$



kde

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} , \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{bmatrix} \text{ a } G_1 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} . \quad (3.31)$$

Dle [15] lze kvadratický problém vlastních čísel linearizovat do tvaru

$$M_1 \mathbf{Z}_1 - k \mathbf{Z}_1 = 0 , \quad (3.32)$$

kde

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ k \mathbf{X}_1 \end{Bmatrix} , \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0_{2N} & I_{2N} \\ -G_1 & F_1 \end{bmatrix} . \quad (3.33)$$

Matici  $M_1$  je identifikována jako tzv. doprovodná matice (v angličtině „companion matrix“) díky čemuž se tento postup nazývá metoda lineární doprovodné matice. Pro  $N$  báзовých funkcí je nutné vyřešit klasický problém vlastních čísel o rozměru  $4N \times 4N$ .

### 3.3.7 Redukce rozměru problému vlastních čísel

Řešení problému (3.32) dává pro  $N$  báзовých funkcí  $4N$  komplexních vlnových čísel. Výsledky jsou nicméně symetrické. Pro Lambovy módy je typická symetrie  $k \rightarrow -k$  a  $k \rightarrow k^*$  [7], kde  $k^*$  značí komplexně sdružené vlnové číslo. Provedením následujících úprav lze rozměr problému redukovat na  $2N \times 2N$  a tudíž i zvýšit numerickou účinnost algoritmu.

Symetrie  $k \rightarrow -k$  je možné využít a redukovat tak rozměr řešené matice  $M_1$ . Nejprve je třeba vyjádřit z první rovnice soustavy (3.29)  $\mathbf{V}$  jako funkci  $\mathbf{U}$ , tedy

$$\mathbf{V} = -(k^2 I_N + D)^{-1} k C \mathbf{U} . \quad (3.34)$$

Poté je tato takto vyjádřený vektor  $\mathbf{V}$  dosazen do druhé rovnice soustavy (3.29). Tato úprava vede na rovnici

$$(k^2 - k^2 A (k^2 I_N + D)^{-1} C + B) \mathbf{U} = 0 , \quad (3.35)$$

která má netriviální řešení v případě

$$\det(k^2 - k^2 A (k^2 I_N + D)^{-1} C + B) = 0 . \quad (3.36)$$

Determinant čtvercové matice lze vynásobit nenulovým číslem, aniž by došlo ke změně

řešení. Vynásobme tedy předchozí rovnici zleva členem  $\det\{(k^2 + D)A^{-1}\}$ , jež je nenulový pokud  $k^2 \neq k_t^2 - \gamma\beta_n^2$  a dále rovnici vynásobme zprava členem  $\det(A) \neq 0$  u kterého můžeme jeho nenulovou hodnotu prokázat numericky. Rovnici tedy můžeme zapsat ve tvaru:

$$\det((k^2 + D)A^{-1}) \det(k^2 - k^2 A(k^2 I_N + D)^{-1}C + B) \det(A) = 0 . \quad (3.37)$$

Dále je možné uvážit, že pro výpočet determinantu platí asociativita (např.  $|L_1 L_2 L_3| = |L_1||L_2||L_3|$ ) – tedy že determinant součinu matic se rovná součinu determinantů matic. Rovnici (3.37) lze tedy zapsat ve tvaru

$$\det(K^2 + K(D - CA + A^{-1}BA) + DA^{-1}BA) = 0 , \quad (3.38)$$

kde  $K = k^2$ . Kvadratický problém vlastních čísel pak může být zapsán jako

$$(K^2 + KF_2 + G_2)\mathbf{X}_2 = 0 , \quad (3.39)$$

kde

$$F_2 = D - CA + A^{-1}BA ,$$

$$G_2 = DA^{-1}BA .$$

Podobně jako v předchozí podkapitole (3.3.6) lze tento problém linearizovat do tvaru

$$M_2 \mathbf{Z}_2 - K \mathbf{Z}_2 = 0 , \quad (3.40)$$

který je už pouze rozměru  $2N \times 2N$  a kde

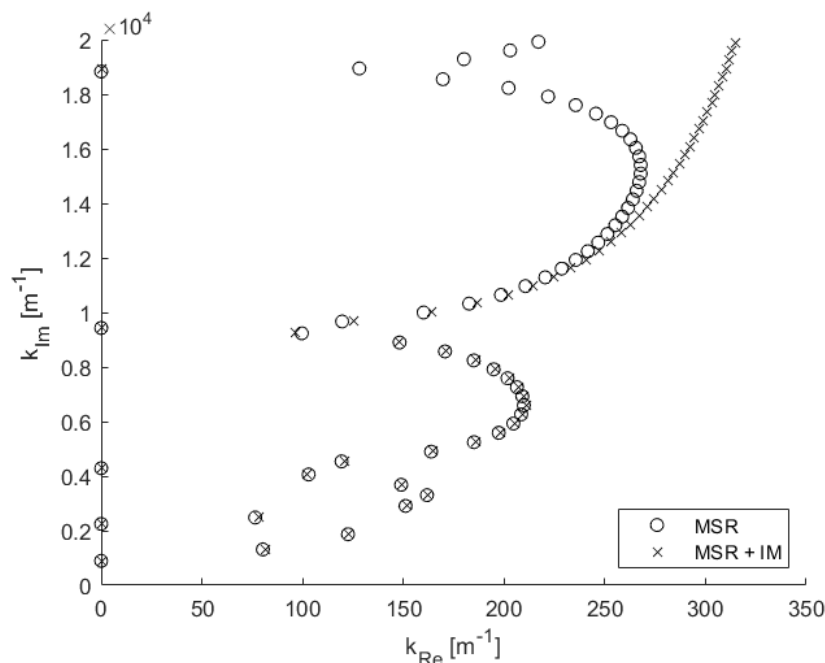
$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -G_2 & -F_2 \end{bmatrix} , \quad (3.41)$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_2 \\ K \mathbf{X}_2 \end{Bmatrix} . \quad (3.42)$$

### 3.3.8 Zhodnocení metody a jejích výsledků

Použitím metody spektrálního rozkladu (MSR) můžeme řešení transcendentní disperzní rovnice, které je konvenční metodou kontur výpočetně relativně nákladné, transformovat na obecně méně nákladný problém vlastních čísel. MSR dává výsledky v podobě počátečních odhadů, na základě kterých lze s pomocí iteračních metod získat řešení s požadovanou přesností.

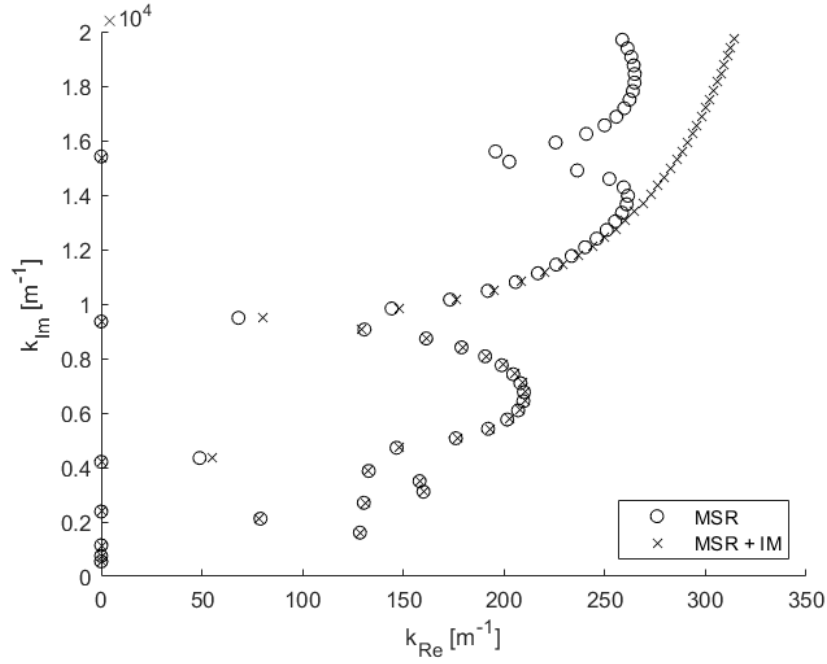
Obrázky 19 a 20 znázorňují řešení disperzní rovnice pro asymetrické a symetrické módy, díky kterým můžeme počáteční odhady a výsledné řešení porovnat.



Obrázek 19: Vlnová čísla pro symetrické módy, vypočtená metodou spektrálního rozkladu, zpřesněná pomocí iteračních metod. Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 20 \text{ mm}$ ,  $f = 985 \text{ kHz}$

Všimněme si relativně kvalitních odhadů ve spodních částech grafů (obr. 19 a 20), přičemž jejich kvalita klesá se vzrůstající imaginární částí. Tato skutečnost je způsobena nedostatečným počtem básových funkcí a můžeme se přesvědčit, že při jeho navýšení se kvalita odhadů zlepší. V praxi je tedy vhodné použít, i z důvodů popsanych níže, o 10 až 20 % vyšší počet básových funkcí než je počet žádaných komplexních řešení. Může totiž nastat případ, kdy iterační metoda z důsledku nízké kvality odhadů zkonverguje k nesprávné hodnotě nebo vůbec nezkonverguje.

Výhodou metody spektrálního rozkladu je fakt, že dokáže kromě komplexních hodnot

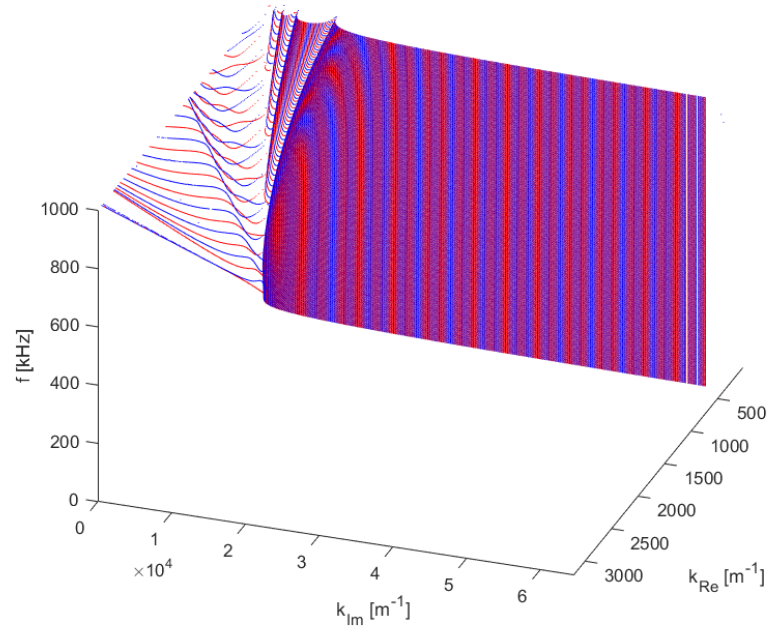


Obrázek 20: Vlnová čísla pro asymetrické módy, získaná pomocí MSR a MSR + IM. Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 20 \text{ mm}$ ,  $f = 985 \text{ kHz}$

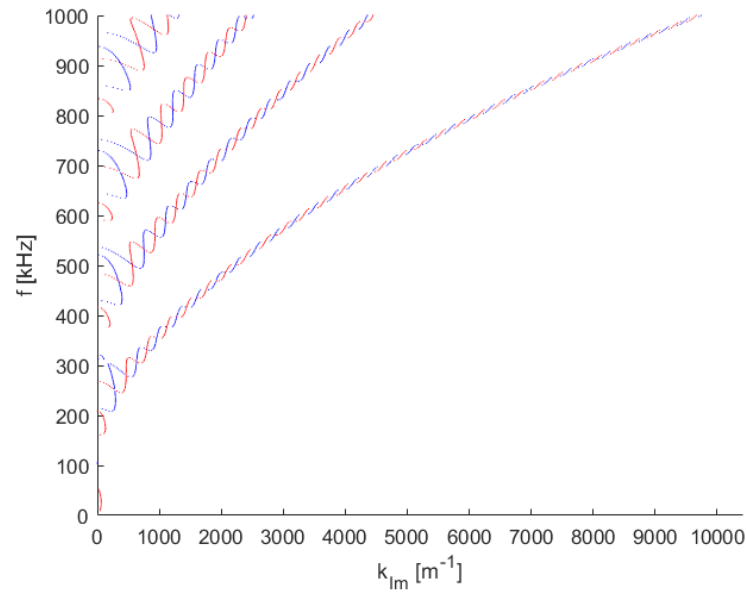
určit i hodnoty ryze reálné a ryze imaginární, které je v případě MK nutné řešit zvlášť. I z tohoto důvodu je vhodné počet bazových funkcí navýšit, jelikož mezi výslednými hodnotami se nachází i reálná a imaginární vlnová čísla. Na obrázku 21 je s pomocí MSR a IM vykreslen průběh komplexních, reálných i imaginárních vlnových čísel v závislosti na frekvenci. Pohled na imaginární vlnová čísla je bohužel překryt komplexními vlnovými čísly. Z toho důvodu bylo žádoucí jej vykreslit zvlášť na obrázku 22.

Za hlavní výhodu MSR můžeme považovat její vlastnost, kdy nevyžaduje žádnou předchozí znalost velikosti prohledávané plochy ani velikosti kroku diskretizace. Pro zvolený (ideálně lehce navýšený) počet bazových funkcí dává jednoduše výsledky v podobě reálných, imaginárních a komplexních vlnových čísel. Metoda je dále v porovnání s MK značně rychlejší a jak bude v další podkapitole ukázáno, v případech tenkých desek je rozdíl výpočetní náročnosti opravdu markantní. Je rovněž potřeba zdůraznit, že ačkoliv není samotné odvození metody zcela triviální, nedá se uvedená skutečnost tvrdit o její implementaci.

Možnou nevýhodu MSR můžeme spatřit v nízké kvalitě počátečních odhadů řešení s nejvyššími imaginárními složkami, které není vhodné použít jako počáteční odhady pro IM.



Obrázek 21: Průběh reálných, imaginárních a komplexních vlnových čísel pro sym. a asym. módy Lambových vln v závislosti na frekvenci. Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 20 \text{ mm}$



Obrázek 22: Detail zobrazující imaginární vlnová čísla sym. a asym. módů Lambových vln v závislosti na frekvenci. Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 20 \text{ mm}$

### 3.3.9 Poznámky k implementaci

Metodu určení vlastních čísel Lambových módů lze jednoduše implementovat použitím následujících kroků:

1. vyčíslíme matice (3.25), případně (3.28)
2. zredukujeme rozměr problému vlastních čísel (viz podkapitola 3.3.7) a sestavíme matici  $M_2$  (3.41)
3. vyřešíme problém vlastních čísel (3.40), přičemž výsledná vlastní čísla dávají hodnoty počátečních odhadů pro výpočet kořenů disperzní rovnice
4. spočítáme hodnoty kořenů disperzní rovnice s požadovanou přesností pomocí iteračních metod (viz podkapitola 3.2), kde počáteční odhady použijeme jako startovací hodnoty

## 3.4 Porovnání numerické účinnosti

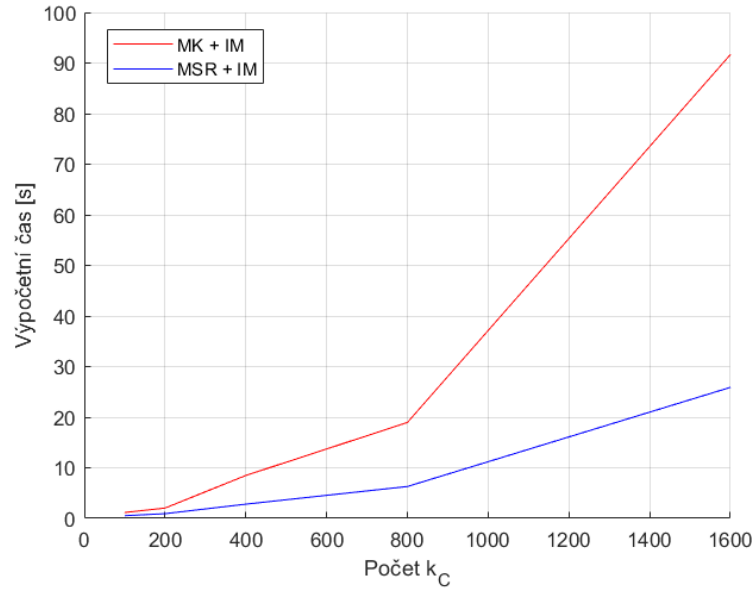
Porovnání numerické účinnosti metody kontur a metody spektrálního rozkladu, včetně využití iteračních metod, můžeme jednoduše provést srovnáním výpočetních časů jednotlivých přístupů v závislosti na počtu hledaných komplexních vlnových čísel. Srovnání, která jsou v této kapitole prezentována, byla provedena na počítači s parametry:

- procesor Intel Core i5-7200U @2,70 GHz,
- paměť 8 GB DDR4 2400 MHz.

Srovnání je zobrazeno na obrázku 23 (případně v tabulce 2), kde můžeme pozorovat přibližně třetinovou výpočetní náročnost přístupu metody spektrálního rozkladu oproti metodě kontur.

Dále můžeme metody srovnat dle výpočetního času v závislosti na tloušťce geometrie, kdy s klesající hodnotou tloušťky můžeme očekávat rostoucí výpočetní čas metody kontur (viz podkapitola 3.2.1).

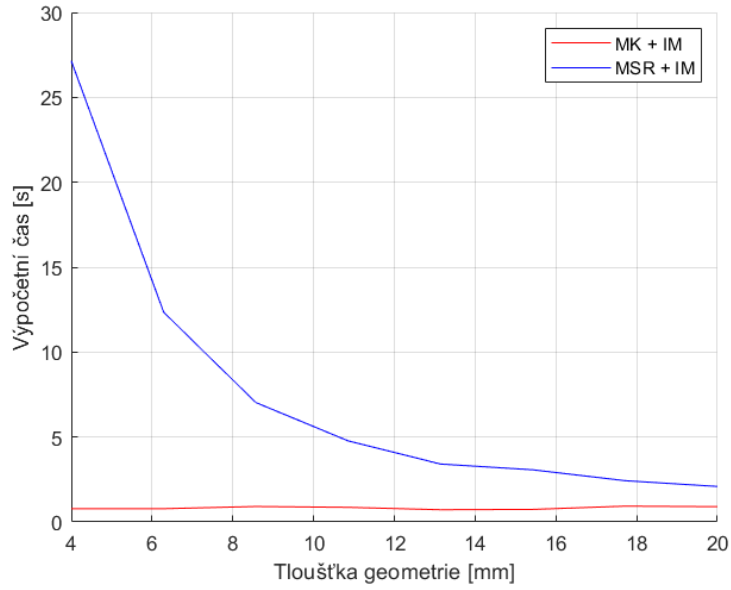
Srovnáme tedy výpočetní časy metod pro případ, kdy požadujeme 200 komplexních vlnových čísel, přičemž parametrem srovnání je tloušťka. Výsledky (obr. 24, případně tab. 3) prokazují zmíněnou negativní vlastnost metody kontur. Naopak u metody spektrálního rozkladu je zjevné, že metoda je na parametru tloušťky nezávislá.



Obrázek 23: Porovnání výpočetních časů MK + IM a MSR + IM v závislosti na počtu identifikovaných kořenů disperzní rovnice (2.31). Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_G = 20 \text{ mm}$ ,  $f = 985 \text{ kHz}$ , délka disretizačního kroku MK  $10 \text{ m}^{-1}$ .

Tabulka 2: Doplnující informace k obrázku 23

Počet $k_C$ [-]	Oblast výskytu $k_C$ [ $\text{m}^{-1} \times \text{m}^{-1}$ ]	Počet báz. funkcí [-]	Čas MK [s]	Čas MSR [s]
100	$(0 ; 392) \times (0 ; 34721)$	112	1,16	0,53
200	$(0 ; 432) \times (0 ; 66171)$	212	2,04	0,93
400	$(0 ; 470) \times (0 ; 129022)$	413	8,48	2,81
800	$(0 ; 507) \times (0 ; 254695)$	813	18,95	6,30
1600	$(0 ; 545) \times (0 ; 506027)$	1614	91,68	25,90



Obrázek 24: Porovnání výpočetních časů MK + IM a MSR + IM pro 200 identifikovaných komplexních kořenů disperzní rovnice (2.31) v závislosti na tloušťce geometrie. Vstupní parametry:  $c_L = 4170 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_T = 2150 \text{ m s}^{-1}$ ,  $f = 985 \text{ kHz}$ , délka disretizačního kroku MK  $10 \text{ m}^{-1}$

Tabulka 3: Doplnující informace k obrázku 24

Tloušťka [mm]	Oblast výskytu $k_C$ [ $\text{m}^{-1} \times \text{m}^{-1}$ ]	Počet báz. funkcí [-]	Čas MK [s]	Čas MSR [s]
20,00	$(0 ; 437) \times (0 ; 66171)$	212	2,09	0,90
17,71	$(0 ; 488) \times (0 ; 74364)$	211	2,43	0,93
15,43	$(0 ; 560) \times (0 ; 84983)$	210	3,07	0,74
13,14	$(0 ; 657) \times (0 ; 98815)$	208	3,41	0,72
10,86	$(0 ; 796) \times (0 ; 119628)$	208	4,77	0,86
8,57	$(0 ; 1007) \times (0 ; 150072)$	206	7,03	0,91
6,29	$(0 ; 1373) \times (0 ; 204655)$	206	12,34	0,78
4,00	$(0 ; 2155) \times (0 ; 318470)$	204	27,14	0,78



## Závěr

Úvodní část předložené diplomové práce je věnována problematice šíření vln v kontinuu, kde jsou objasněny základní matematické vztahy popisující šíření vlny pro případ napnuté struny. Dále je v této části vysvětlen a názorně zobrazen fyzikální význam vlnových čísel, a to v reálném, ryze imaginárním i komplexním oboru. Následující kapitola je zaměřena na objasnění principu vzniku Lambových vln, popisem jejich módů a odvozením disperzních rovnic pro symetrické i asymetrické módy. Závěr kapitoly 2 je věnován praktickému využití Lambových vln v oblasti NDT včetně ukázky kontroly potrubí pomocí měřicího prstence a vysvětlení souvislosti praktického měření s hlavní náplní této práce – numerickým řešením disperzních rovnic Lambových vln.

Následuje praktická část, kde autor prezentuje vybrané způsoby numerického řešení pro výpočet vlnových čísel disperzní rovnice Lambových vln. Pro případ identifikace reálných a ryze imaginárních vlnových čísel je zde uvedena metoda uzávorkování. Větší důraz byl kladen na metody, umožňující identifikaci komplexních vlnových čísel, které jsou zde zastoupeny v podobě metody kontur a metody spektrálního rozkladu. Kapitola 3 je zakončena jejich srovnáním na praktických příkladech výpočtu komplexních vlnových čísel.

Princip prezentované metody kontur spočívá v diskretizaci zvolené oblasti výskytu komplexních vlnových čísel a následném nalezení kontur s nulovou reálnou, respektive imaginární, funkční hodnotou reziduálního tvaru disperzní rovnice. Výsledné průsečíky kontur určují přibližná řešení a pro získání zpřesněných hodnot komplexních vlnových čísel je použito iteračních metod. Jednoduchost metody je však bohužel vyvážena jejími negativními aspekty v podobě relativně vysoké výpočetní náročnosti, potřeby vhodného odhadu velikosti plochy výskytu komplexních vlnových čísel a kroku diskretizace. Tyto nevýhody jsou demonstrovány v závěru kapitoly 3, kde výpočetní časy této metody značně narůstají v závislosti na velikosti prohledávané plochy.

Metoda spektrálního rozkladu spočívá v aproximaci řídících rovnic Lambových vln vhodně zvolenými bázemi, následnou projekcí na báze funkce a finálním řešením kvadratického problému vlastních čísel, který vznikl důsledkem zmíněné projekce. Výsledná vlastní čísla reprezentují počáteční odhady řešení disperzní rovnice Lambových vln, jejichž přesnost závisí na zvoleném počtu bazových funkcí. Zpřesněné hodnoty komplexních, ale i reálných a ryze imaginárních, vlnových čísel lze obdržet využitím

iteračních metod. Nespornou výhodou této metody je, na rozdíl od metody kontur, její nezávislost na velikosti oblasti výskytu požadovaného počtu vlnových čísel, což je demonstrováno v závěru 3. kapitoly. Určitou nevýhodu metody lze spatřit v nízké kvalitě některých odhadů, kterou však lze úspěšně potlačit navýšením počtu bázových funkcí.

Mimo rozsah práce bylo experimentováno s algoritmy poskytující detekci a případnou opravu chybně spočtených módů, což by mohlo být zajímavým námětem pro rozšíření této diplomové práce. Dalším zajímavým rozšířením by mohlo, v případě metody kontur, být nahrazení plošné diskretizace a tvorby kontur metodou délky oblouku.

## Seznam použité literatury

- [1] Galán, J. M.; Abascal, R.: Lamb mode conversion at edges. A hybrid boundary element–finite-element solution. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ročník 117, č. 4, 2005: s. 1777–1784.
- [2] Gunawan, A.; Hirose, S.: Mode-exciting method for Lamb wave-scattering analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ročník 115, č. 3, 2004: s. 996–1005.
- [3] Poddar, B.; Giurgiutiu, V.: Complex modes expansion with vector projection using power flow to simulate Lamb waves scattering from horizontal cracks and disbonds. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ročník 140, 09 2016: s. 2123–2133.
- [4] Pagneux, V.; Maurel, A.: Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, ročník 458, č. 2024, 2002: s. 1913–1930.
- [5] Feng, F.; Shen, J.; Lin, S.: Scattering matrices of Lamb waves at irregular surface and void defects. *Ultrasonics*, ročník 52, č. 6, 2012: s. 760 – 766, ISSN 0041-624X. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0041624X12000376>
- [6] Šofer, M.: *Matematický popis interakce Lambových vln s nespojitostmi v deskovitých strukturách*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2018. ISBN 978-80-248-4234-9.
- [7] Pagneux, V.; Maurel, A.: Determination of Lamb mode eigenvalues. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ročník 110, 10 2001: s. 1307–14.
- [8] Rose, J. L.: *Ultrasonic Guided Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, 2014.
- [9] Achanbach, J.: Chapter 2 - The Linearized Theory of Elasticity. In *Wave Propagation in Elastic Solids*, editace J. Achanbach, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Amsterdam: Elsevier, 1975, s. 46 – 78. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780720403251500072>

- [10] Achanbach, J.: Chapter 6 - Harmonic Waves in Waveguides. In *Wave Propagation in Elastic Solids*, editace J. Achanbach, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Amsterdam: Elsevier, 1975, s. 202 – 261.  
Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780720403251500114>
- [11] Guided Wave Testing Gul. *Irisndt* [online]. [cit. 2019-05-19].  
Dostupné z: <https://www.irisndt.com/ca/specialized-ndt/guided-wave-gul/>
- [12] L. Rose, J.: A Baseline and Vision of Ultrasonic Guided Wave Inspection Potential. *Journal of Pressure Vessel Technology*, ročník 124, 08 2002: str. 273.
- [13] Solve system of nonlinear equations - MATLAB fsolve. *MathWorks United Kingdom* [online]. [cit. 2019-05-19].  
Dostupné z: <https://uk.mathworks.com/help/optim/ug/fsolve.html>
- [14] Fast and Robust Curve Intersections. *File Exchange - MATLAB Central* [online]. [cit. 2019-05-19].  
Dostupné z: <https://uk.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/11837-fast-and-robust-curve-intersections>
- [15] Bridges, T.; Morris, P.: Differential eigenvalue problem in which the parameter appears nonlinearly. *Journal of Computational Physics*, ročník 55, 10 1984: s. 437–460.

## Seznam příloh

-

## **Poděkování**

Rád bych zde poděkoval vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Michalu Šoferovi, Ph.D. za jeho cenné rady a čas, který mi věnoval.

Dále bych rád poděkoval své rodině za podporu při studiu.